

Topologie

Voorjaar 2015

Docent: Peter Bruin

P.J.Bruin@math.leidenuniv.nl

Versie van 30 mei 2015

Commentaar en correcties worden op prijs gesteld.

Inhoudsopgave

Inleiding	1
1. Metrische ruimten	1
2. Open en gesloten verzamelingen	3
3. Inwendige, afsluiting, rand, dichtheid	5
4. Convergentie van rijen	6
5. Continue afbeeldingen	7
6. Volledigheid	9
7. Topologische ruimten	12
8. De producttopologie	14
9. Compactheid	15
10. Homeomorfismen	18
11. De stelling van Tichonov	18
12. Lokaal compacte ruimten; compactificaties	19
13. Samenhang	20
14. Aaneenschakeling en omkering van wegen	22
15. Wegsamenhangscomponenten	22
16. Samenhangscomponenten	23
17. Lokale (weg)samenhang	24
18. Homotopie	25
19. De fundamenteaalgroep	29
20. Overdekkingsruimten en het liften van wegen	30
21. Een groepswerking van de fundamenteaalgroep	33
22. De fundamenteaalgroep van de cirkel	34
23. Homotopie-equivalentie	35
24. De fundamenteaalgroep (vervolg)	36

Inleiding

Dit is een verzameling aantekeningen voor het college Topologie, gegeven in het voorjaar van 2015. Het college volgt grotendeels het boek *A Taste of Topology* van Volker Runde, hoofdstukken 2, 3 en 5. Het boek is de belangrijkste referentie; dit dictaat dient er vooral toe om sommige onderwerpen op een iets andere manier te belichten.

1. Metrische ruimten

In de topologie wordt onder andere het begrip *continuïteit* uit de analyse gegeneraliseerd.

Definitie. Zij D een deelverzameling van $\mathbf{R}$. Een functie $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ is *continu* in een punt x als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $y \in D$ geldt

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Onnauwkeurig gezegd: als y dicht genoeg bij x ligt, dan ligt $f(y)$ dicht bij $f(x)$. Het begrip afstand lijkt voor de notie van continuïteit dus van belang te zijn. De eerste stap in de richting van een algemene definitie van continue afbeeldingen (hiervoor zullen we later het begrip *topologische ruimte* introduceren) is het definiëren van ruimten die voorzien zijn van een afstandsfunctie. We zullen later echter een definitie van continuïteit invoeren die niet naar een afstandsfunctie verwijst.

Definitie. Een *metriek* of *afstandsfunctie* op een verzameling X is een functie

$$d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

met de volgende eigenschappen:

- (1) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) \geq 0$, met gelijkheid dan en slechts dan als $x = y$ (*positief-definietheid*).
- (2) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) = d(y, x)$ (*symmetrie*).
- (3) Voor alle $x, y, z \in X$ geldt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*driehoeksongelijkheid*).

Een *metrische ruimte* is een paar (X, d) waarbij X een verzameling is en $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ een metriek.

Als de metriek d uit de context duidelijk is, wordt (X, d) vaak afgekort tot X .

Voorbeelden. (1) Als V een reële of complexe vectorruimte is en $\| \cdot \|$ een norm op V , dan is de functie

$$\begin{aligned} d: V \times V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

een metriek op V . Een belangrijk speciaal geval is $V = \mathbf{R}^n$ met de norm $\| \cdot \|$ gedefinieerd door het standaardinproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dus

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \end{aligned}$$

De bijbehorende metriek

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

heet de *euclidische metriek* op $\mathbf{R}^n$.

(2) De functie

$$\begin{aligned} d: \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto |x - x'| + |y - y'| \end{aligned}$$

is een metriek op $\mathbf{Z}^2$. Deze staat bekend als de *Manhattan-* of *taximetriek*. Deze metriek kan ook afgeleid worden uit de L^1 -norm op $\mathbf{R}^2$, die gedefinieerd is door

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

(3) Zij (F, d) een metrische ruimte en $p \in F$. Stel dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

Dan noemen we d een *Franse-spoorwegmetriek* met centrum p . (De snelste treinreis via twee Franse steden loopt vaak via Parijs.)

(4) Zij X een verzameling en definieer $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ door

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Dan is (X, d) een metrische ruimte. Dit is een voorbeeld van een *discrete* metrische ruimte.

(5) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X . Dan is de beperking $d|_{Y \times Y}$ van d tot de deelverzameling $Y \times Y$ van $X \times X$ een metriek op Y (gana). Metrische ruimten van de vorm $(Y, d|_{Y \times Y})$ heten *metrische deelruimten* van (X, d) .

2. Open en gesloten verzamelingen

Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $x \in X$ en zij r een positief reëel getal. Naar analogie met de euclidische ruimte definiëren we de *open bal van straal r om x* als

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

In het geval $X = \mathbf{R}$ (met de euclidische metriek) zijn open ballen hetzelfde als niet-lege, begrensde, open intervallen. Naar analogie met de euclidische metriek definiëren we nu algemene open verzamelingen als volgt.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *open deelverzameling* van X is een deelverzameling $U \subseteq X$ zodanig dat er voor elke $x \in U$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x)$ bevat is in U .

Propositie 2.1. Zij (X, d) een metrische ruimte.

- (a) Elke open bal in X is een open deelverzameling van X .
- (b) Een deelverzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een vereniging van open ballen is.

Bewijs. (a) Zij $B_\epsilon(x)$ een open bal van straal ϵ om een punt $x \in X$, en zij $y \in B_\epsilon(x)$ willekeurig gegeven. We moeten bewijzen dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat de open bal $B_\delta(y)$ van straal δ om y in $B_\epsilon(x)$ bevat is. We kiezen $\delta = \epsilon - d(x, y)$; dit is positief omdat y in $B_\epsilon(x)$ ligt. Voor alle $z \in B_\delta(y)$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &< d(x, y) + \delta \\ &= \epsilon \end{aligned},$$

en hiermee is bewezen dat $B_\delta(y) \subseteq B_\epsilon(x)$.

(b) Zij U een deelverzameling van X . Stel dat U een verzameling van open ballen is, en zij $x \in X$. Wegens de aanname bestaan er $y \in X$ en $\epsilon > 0$ zodanig dat

$$x \in B_\epsilon(y) \subseteq U.$$

Wegens (a) is $B_\epsilon(y)$ open, dus er is een open bal rond x die bevat is in $B_\epsilon(y)$ en dus in U . Omdat dit voor alle $x \in U$ geldt, volgt dat U open is. Stel omgekeerd dat U open is. Dan is voor elke $x \in U$ de verzameling

$$E(x, U) = \{\epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x) \subseteq U\}$$

niet-leeg. Er geldt dus

$$x \in \bigcup_{\epsilon \in E(x,U)} B_\epsilon(x) \subseteq U.$$

Nemen we nu de vereniging over alle $x \in U$, dan zien we

$$U = \bigcup_{x \in U} \bigcup_{\epsilon \in E(x,U)} B_\epsilon(x),$$

dus U is een vereniging van open ballen. $\square$

Definitie. Zij X een metrische ruimte. Een *gesloten deelverzameling* van X is een deelverzameling $F \subseteq X$ zodanig dat het complement $X \setminus F$ een open deelverzameling van X is.

Voorbeeld. Zij X een metrische ruimte, $x \in X$ en $r > 0$. De *gesloten bal* van straal r om x is gedefinieerd als

$$B_r[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

We beweren dat $B_r[x]$ inderdaad een gesloten deelverzameling van X is, met andere woorden dat $X \setminus B_r[x]$ open is. Zij $y \in X \setminus B_r[x]$; dan geldt $d(x, y) > r$. We schrijven $\epsilon = d(x, y) - r$. Voor alle z in de open bal $B_\epsilon(y)$ geeft de driehoeksongelijkheid

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \epsilon.$$

Hieruit volgt

$$d(x, z) > d(x, y) - \epsilon = r,$$

dus $B_\epsilon(y)$ is bevat in $X \setminus B_r[x]$, hetgeen we moesten bewijzen.

Propositie 2.2. Zij X een metrische ruimte.

- (a) Elke vereniging van open deelverzamelingen van X is open.
- (b) Elke doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van X is open.
- (c) Elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.
- (d) Elke vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.

Opmerking. Als $\mathcal{Y}$ een collectie deelverzamelingen van X is, dan zijn de verzamelingen $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ en $\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ voor $\mathcal{Y} = \emptyset$ gelijk aan $\emptyset$ respectievelijk X . In het bijzonder volgt uit de propositie dat $\emptyset$ en X zowel open als gesloten deelverzamelingen van X zijn.

Bewijs. (a) Zij $\mathcal{U}$ een collectie open deelverzamelingen van X , en zij $U' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Wegens propositie 2.1 is elke $U \in \mathcal{U}$ een vereniging van open ballen, en derhalve geldt dit ook voor U' .

(b) We bewijzen met inductie naar n dat de doorsnede van n open deelverzamelingen open is. Het geval $n = 0$ (X is open) volgt uit de definitie van open deelverzamelingen. Stel dat voor gegeven $n \geq 0$ elke vereniging van n open deelverzamelingen open is. Als $U_0, \dots, U_n$ open zijn, dan is $U = \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i$ open wegens de inductieveronderstelling; we moeten bewijzen dat $U' = U \cap U_n$ open is. Zij $x \in U'$. Er bestaan $\epsilon > 0$ en $\epsilon_n > 0$ zodanig dat $B_\epsilon(x) \subseteq U$ en $B_{\epsilon_n}(x) \subseteq U_n$. Neem nu $\epsilon' = \min\{\epsilon, \epsilon_n\}$; dan geldt $B_{\epsilon'}(x) \subseteq U$. Dit geldt voor alle $x \in U$, dus U is open.

De beweringen (c) en (d) volgen uit (a) en (b) door het nemen van complementen. $\square$

We eindigen met twee definities die in veel contexten voorkomen.

Definitie. Zij X een metrische ruimte. Een *omgeving* van x is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $\epsilon > 0$ bestaat met $B_\epsilon(x) \subseteq N$.

Een open omgeving van x is uiteraard een omgeving van x die ook een open deelverzameling van X is, oftewel een open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $x \in U$.

Definitie. Een metrische ruimte X heet *discreet* als voor elke $x \in X$ de deelverzameling $\{x\}$ open is in X .

Propositie 2.3. Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- (1) X is discreet;
- (2) elke deelverzameling van X is open;
- (2) elke deelverzameling van X is gesloten.

Bewijs. Opgave. □

3. Inwendige, afsluiting, rand, dichtheid

Voortbouwend op de noties van open en gesloten deelverzamelingen zullen we nu een aantal nieuwe begrippen invoeren. Het blijkt dat dit gedaan kan worden zonder expliciet naar de metriek te verwijzen.

Definitie. Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . Het *inwendige* van S in X , notatie S° , is de grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $U \subseteq S$. De *afsluiting* van S in X , notatie $\bar{S}$, is de kleinste gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $S \subseteq F$.

Om er zeker van te zijn dat de definitie van het inwendige betekenis heeft, moeten we nagaan dat er daadwerkelijk zo'n grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ bestaat. Met andere woorden, zij $\mathcal{U}$ de verzameling van alle open deelverzamelingen van X is die in S bevat zijn, geordend onder inclusie. Dan moeten we aantonen dat $\mathcal{U}$ een (noodzakelijkerwijs uniek) grootste element heeft. Dit element bestaat: de verzameling $U' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ is open en is bevat in S , dus U' is het (unieke) grootste element van $\mathcal{U}$. Op dezelfde manier kunnen we nagaan dat de definitie van de afsluiting betekenis heeft (de doorsnede van alle gesloten deelverzamelingen die S bevatten is zelf ook een gesloten deelverzameling die S bevat, en daarmee automatisch de kleinste).

Propositie 3.1. Zij X een metrische ruimte. Het nemen van het inwendige en van de afsluiting in X zijn complementaire bewerkingen in de zin dat voor alle $S \subseteq X$ geldt

$$X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$$

en

$$X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}.$$

Bewijs. Opgave. □

Propositie 3.2. Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X .

(a) Het inwendige van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat er een omgeving van x bestaat die bevat is in S .

(b) De afsluiting van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x een niet-lege doorsnede met S heeft.

Bewijs. (a) Stel dat x in S° ligt. Omdat S° open is in X , is S° zelf een omgeving van x die bevat is in S . Stel omgekeerd dat x een omgeving heeft die bevat is in S . Dan heeft x ook een open omgeving die geheel binnen S ligt, en deze open omgeving is op haar beurt bevat in S° .

(b) Dit volgt uit de volgende keten van equivalenties:

$$\begin{aligned} x \in \bar{S} &\iff x \notin (X \setminus S)^\circ \\ &\iff \text{geen enkele omgeving van } x \text{ is bevat in } X \setminus S \\ &\iff \text{elke omgeving van } x \text{ heeft niet-lege doorsnede met } S, \end{aligned}$$

waarbij we in de eerste stap propositie 3.1 gebruikt hebben. $\square$

Definitie. Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De *rand* van S in X , notatie ∂S , is de gesloten deelverzameling van X gedefinieerd door

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}.$$

Propositie 3.3. Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De rand van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x zowel met S als met $X \setminus S$ een niet-lege doorsnede heeft.

Bewijs. Dit volgt uit de definitie van ∂S en propositie 3.2. $\square$

Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ is ∂S wegens de definitie en propositie 3.1 te schrijven als

$$\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ.$$

Dit betekent dat X te schrijven is als een disjuncte vereniging

$$\begin{aligned} X &= \bar{S} \sqcup (X \setminus \bar{S}) \\ &= \bar{S} \sqcup (X \setminus S)^\circ \\ &= S^\circ \sqcup \partial S \sqcup (X \setminus S)^\circ. \end{aligned}$$

Definitie. Zij X een metrische ruimte. Een deelverzameling $S \subseteq X$ heet *dicht* in X als de afsluiting van S gelijk is aan X .

Waarschuwing. Bij het gebruiken van de hierboven ingevoerde begrippen (open en gesloten verzamelingen, inwendige, afsluiting, rand en dichtheid) is het belangrijk om steeds in gedachten te houden op welke omliggende metrische ruimte X ze betrekking hebben. Bekijk bijvoorbeeld de metrische deelruimte $X = [0, 1)$ van $\mathbf{R}$. Met betrekking tot de metrische ruimte X geldt: X is zowel open als gesloten, dus $X^\circ = X = \bar{X}$ en $\partial X = \emptyset$, en X is dicht. Met betrekking tot de metrische ruimte $\mathbf{R}$ geldt echter: X is noch open noch gesloten, $X^\circ = (0, 1)$, $\bar{X} = [0, 1]$, $\partial X = \{0, 1\}$ en X is niet dicht.

4. Convergentie van rijen

De bekende definitie van convergentie voor rijen van reële getallen is zonder problemen te vertalen naar de context van metrische ruimten.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X , en zij $x \in X$. De rij $(x_n)_{n \geq 0}$ is *convergent* (met limiet x), of *convergeert naar* x , als er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat $d(x, x_n) < \epsilon$ voor alle $n \geq N$. Notatie: $x_n \rightarrow x$ als $n \rightarrow \infty$, of $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Propositie 4.1. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X . Dan heeft $(x_n)_{n \geq 0}$ ten hoogste één limiet.

Bewijs. Stel dat de rij twee verschillende limieten x en x' heeft. Zij $\delta = d(x, x') > 0$. Wegens de definitie van convergentie bestaat er een $n \geq 0$ waarvoor geldt $d(x, x_n) < \delta/2$ en $d(x', x_n) < \delta/2$. Hieruit volgt

$$\delta = d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

een tegenspraak. □

Propositie 4.2. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . Dan is de afsluiting $\bar{S}$ de verzameling van punten van X die de limiet zijn van een rij in S die in X convergeert.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in S die in X convergeert naar x . Voor alle $\epsilon > 0$ geldt voor $n \geq 0$ voldoende groot dat $x_n \in B_\epsilon(x)$, dus $B_\epsilon(x)$ heeft niet-lege doorsnede met S . Hieruit volgt $x \in \bar{S}$.

Zij omgekeerd $x \in \bar{S}$. Dan is voor elke $n \geq 0$ de doorsnede van $B_{2^{-n}}(x)$ met S niet-leeg, dus er bestaat een $x_n \in S$ met $d(x_n, x) < 2^{-n}$. De rij $(x_n)_{n \geq 0}$ convergeert dus naar x . □

Gevolg 4.3. Zij X een metrische ruimte, en zij F een deelverzameling van X . Dan is F gesloten dan en slechts dan als voor elke rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in F die in X convergeert, de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in F ligt.

Voorbeelden. (1) Zij $B([0, 1], \mathbf{R})$ de verzameling van begrensde functies $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. De *uniforme metriek* op $B([0, 1], \mathbf{R})$ is gedefinieerd door

$$D(f, g) = \sup_{[0, 1]} |f - g| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \quad \text{voor alle } f, g \in B([0, 1], \mathbf{R}).$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat D inderdaad een metriek op $B([0, 1], \mathbf{R})$ is. Een rij functies $(f_n)_{n \geq 0}$ in $B([0, 1], \mathbf{R})$ convergeert met betrekking tot D dan en slechts dan als $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform convergeert.

(2) Op dezelfde manier introduceren we voor een verzameling $S \neq \emptyset$ en een metrische ruimte (Y, d) de verzameling $B(S, Y)$ van begrensde functies $S \rightarrow Y$ (zie opgavenblad 2) voorzien van de metriek

$$D(f, g) = \sup_{s \in S} d(f(s), g(s)).$$

Dit geeft een algemene context voor het begrip uniforme convergentie.

5. Continue afbeeldingen

Ook de bekende definitie van continuïteit is zonder problemen te generaliseren naar metrische ruimten. Er blijkt een nuttige karakterisering van continue afbeeldingen te bestaan in termen van open verzamelingen.

Definitie. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten. Een *continue afbeelding* van X naar Y is een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat er voor elke $a \in X$ en elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Propositie 5.1. Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- (1) f is continu;
- (2) voor alle $a \in X$ en alle $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}B_\epsilon(f(a))$.
- (3) voor elke convergente rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X met limiet a is de rij $(f(x_n))_{n \geq 0}$ in Y convergent met limiet $f(a)$;
- (4) voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq Y$ is $f^{-1}F$ een gesloten deelverzameling van X .
- (5) voor elke open deelverzameling $U \subseteq Y$ is $f^{-1}U$ een open deelverzameling van X ;

Bewijs. We bewijzen de onderstaande implicaties.

(1) $\iff$ (2): Deze twee uitspraken zijn slechts herformuleringen van elkaar.

(2) $\implies$ (3): Neem aan dat (2) geldt en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een convergente rij in X met limiet a . Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Wegens (2) is er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}B_\epsilon(f(a))$. Wegens de convergentie van $(x_n)_{n \geq 0}$ is er $N \geq 0$ zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B_\delta(a)$. Hieruit volgt $f(x_n) \in B_\epsilon(f(a))$ voor alle $n \geq N$. Omdat ϵ willekeurig was, concluderen we dat $(f(x_n))_{n \geq 0}$ in Y convergeert naar $f(a)$.

(3) $\implies$ (4): Neem aan dat (3) geldt, zij $G \subseteq Y$ gesloten, en zij $F = f^{-1}G$. We gaan bewijzen dat elke rij in F die convergeert in X haar limiet in F heeft; wegens propositie 4.2 geldt dan $\bar{F} = F$, dus F is gesloten. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in F met limiet $a \in X$. Dan is $(f(x_n))_{n \geq 0}$ een rij in G die in Y convergeert naar $f(a)$. Omdat G gesloten is, geldt $f(a) \in G$ wegens propositie 4.2. Dit is equivalent met $a \in F$, hetgeen we moesten bewijzen.

(4) $\implies$ (5): Dit volgt uit $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}U$.

(5) $\implies$ (2): Neem aan dat (5) geldt, en zijn $a \in X$ en $\epsilon > 0$ gegeven. Dan is $B_\epsilon(f(a))$ open in Y , dus per aanname is $f^{-1}B_\epsilon(f(a))$ open in X . Bovendien geldt $a \in f^{-1}B_\epsilon(f(a))$. Wegens de definitie van open verzamelingen bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}B_\epsilon(f(a))$, hetgeen we moesten bewijzen. $\square$

Voorbeelden. (1) Als X een discrete metrische ruimte is, dan is elke deelverzameling van X open, dus elke afbeelding van X naar een metrische ruimte Y is continu.

(2) Zij (X, d) een metrische ruimte. We voorzien de verzameling $X^2 = X \times X$ van de metriek

$$\begin{aligned} \tilde{d}: X^2 \times X^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto d(x, x') + d(y, y'). \end{aligned}$$

(Dit is een generalisatie van de Manhattanmetriek op $\mathbf{R}^2$.) We beweren dat $d: (X^2, \tilde{d}) \rightarrow \mathbf{R}$ een continue afbeelding is. Zij $P_0 = (x_0, y_0) \in X^2$, en zij $\epsilon > 0$. Voor $P = (x, y) \in X^2$ geldt (zie Runde, Example 2.3.9)

$$\begin{aligned} |d(P) - d(P_0)| &= |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \\ &\leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \\ &= \tilde{d}(P, P_0). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle P in de open bal $B_\epsilon(P_0)$ in X^2 het punt $d(P)$ in de open bal $B_\epsilon(d(P_0))$ in $\mathbf{R}$ ligt. Aangezien ϵ willekeurig was, is d continu.

6. Volledigheid

Het begrip *Cauchyrij* speelt een belangrijke rol in de constructie van de reële getallen. We voeren dit begrip ook in de context van metrische ruimten in.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *Cauchyrij* in X is een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ zodanig dat er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Het is niet moeilijk na te gaan dat elke convergente rij een Cauchyrij is. Het omgekeerde geldt echter niet automatisch.

Definitie. Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als elke Cauchyrij in X convergeert.

Voorbeelden. (1) De metrische ruimte $\mathbf{R}$ is volledig wegens de constructie van $\mathbf{R}$ met behulp van equivalentieklassen van Cauchyrijen in $\mathbf{Q}$.

(2) Net zo is de metrische ruimte $\mathbf{R}^n$ (met de euclidische metriek) volledig.

(3) Zij S een verzameling met de metriek d gegeven door $d(x, y) = 0$ voor $x = y$ en $d(x, y) = 1$ voor $x \neq y$. Dan is elke Cauchyrij in S uiteindelijk constant, dus (S, d) is volledig.

(4) Zij S een niet-lege verzameling, zij (Y, d) een volledige metrische ruimte, en zij $B(S, Y)$ de verzameling van begrensde functies $f: S \rightarrow Y$, voorzien van de uniforme metriek D . We beweren dat $B(S, Y)$ volledig is met betrekking tot D . Zij dus $(f_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in $B(S, Y)$. Voor alle $s \in S$ en alle $m, n \geq 0$ geldt $d(f_m(s), f_n(s)) \leq D(f_m, f_n)$; hieruit volgt dat voor alle $s \in S$ de rij $(f_n(s))_{n \geq 0}$ in Y een Cauchyrij is. We definiëren een functie $f: S \rightarrow Y$ als de puntsgewijze limiet

$$f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s).$$

We beweren dat f begrensd is. We kiezen een willekeurige $\epsilon > 0$. Zij N zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $D(f_m, f_n) < \epsilon$. Voor alle $x \in S$ en $n \geq N$ geldt (omdat f de puntsgewijze limiet van $(f_n)_{n \geq 0}$ is, en wegens de continuïteit van d)

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq D(f_m, f_n) < \epsilon.$$

Zij $R = \sup_{s, t \in S} d(f_N(s), f_N(t))$. Voor alle $s, t \in S$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s), f_N(s)) + d(f_N(s), f_N(t)) + d(f_N(t), f(t)) \\ &< \epsilon + R + \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f in $B(S, Y)$ ligt. We beweren vervolgens dat $f_n \rightarrow f$ als $n \rightarrow \infty$. Dit volgt uit het feit dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$D(f, f_n) = \sup_{x \in S} d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$$

en het feit dat ϵ willekeurig gekozen was.

Propositie 6.1. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een metrische deelruimte van X .

- (1) Als X volledig is en Y gesloten in X , dan is Y volledig.
- (2) Als Y volledig is, dan is Y gesloten in X .

Bewijs. (1) Stel X is volledig en Y is gesloten in X . Elke Cauchyrij $(x_n)_{n \geq 0}$ in Y is ook een Cauchyrij in X en heeft dus een limiet $x \in X$. Aangezien Y gesloten is, geldt $x \in Y$ wegens propositie 4.2. Hieruit volgt dat Y volledig is.

(2) Stel Y is volledig, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in Y die convergent is in X . Dan is $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in X en dus ook in Y . Aangezien Y volledig is, convergeert $(x_n)_{n \geq 0}$ in Y . Wegens propositie 4.2 is Y gesloten. $\square$

Voorbeelden. (1) De volledige metrische deelruimten van $\mathbf{R}^n$ zijn wegens de propositie precies de gesloten deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

(2) Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten met $X \neq \emptyset$ en Y volledig. Zij $BC(X, Y) \subseteq B(X, Y)$ de verzameling van begrensde continue functies $X \rightarrow Y$. We beperken de uniforme metriek D op $B(X, Y)$ tot een metriek op $BC(X, Y)$. We beweren dat $BC(X, Y)$ gesloten is in $B(X, Y)$; wegens propositie 6.1 is $BC(X, Y)$ dan ook volledig. Zij dus $(f_n)_{n \geq 0}$ een rij in $BC(X, Y)$ die in $B(X, Y)$ convergeert naar f . We beweren dat f continu is. Zij $a \in X$ en zij $\epsilon > 0$. We zoeken $\delta > 0$ waarvoor geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f(t), f(a)) < \epsilon.$$

Zij $n \geq 0$ zodanig dat $D(f_n, f) < \epsilon/3$, en zij δ zodanig dat geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f_n(t), f_n(a)) < \epsilon/3.$$

Voor alle $t \in B_\delta(a)$ geldt dan

$$\begin{aligned} d_Y(f(t), f(a)) &\leq d_Y(f(t), f_n(t)) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) \\ &\leq D(f, f_n) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + D(f_n, f) \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aangezien ϵ willekeurig was, volgt hieruit de bewering.

Definitie. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten. Een *isometrie* van (X, d) naar (X', d') is een afbeelding $f: X \rightarrow X'$ zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *completering* van (X, d) is een volledige metrische ruimte $(\tilde{X}, \tilde{d})$ samen met een isometrie $\iota: (X, d) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$ met de volgende eigenschap: voor elke metrische ruimte (Y, d_Y) en elke isometrie $f: (X, d) \rightarrow (Y, d_Y)$ is er een unieke isometrie $g: (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (Y, d_Y)$ zodanig dat $f = g \circ \iota$.

Een complettering is “uniek op een unieke bijectieve isometrie na”. Preciezer gezegd:

Lemma 6.2. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zijn $((\tilde{X}_1, \tilde{d}_1), \iota_1)$ en $((\tilde{X}_2, \tilde{d}_2), \iota_2)$ twee completteringen van (X, d) . Dan bestaat er een bijectieve isometrie $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ met $\iota_2 = g \circ \iota_1$.

Bewijs. Wegens de eigenschap van de complettering voor $\tilde{X}_1$ respectievelijk $\tilde{X}_2$ zijn er isometrieën $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ respectievelijk $h: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ zodanig dat $\iota_2 = g \circ \iota_1$ en $\iota_1 = h \circ \iota_2$. Hieruit volgt $\iota_1 = h \circ (g \circ \iota_1) = (h \circ g) \circ \iota_1$. De identiteit op $\tilde{X}_1$ is echter ook een isometrie $k: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$ met $\iota_1 = k \circ \iota_1$; per aanname is $h \circ g$ dus de identiteit op $\tilde{X}_1$. Net zo is $g \circ h$ de identiteit op $\tilde{X}_2$. We concluderen dat $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ een bijectieve isometrie is. $\square$

Propositie 6.3. *Elke metrische ruimte (X, d) heeft een completering $(\tilde{X}, \tilde{d})$.*

Bewijs. Zij R de verzameling van alle Cauchyrijen in X . We definiëren eerst een equivalentierelatie op R . Twee Cauchyrijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ noemen we *equivalent* (notatie: $(x_n)_{n \geq 0} \sim (y_n)_{n \geq 0}$) als $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$ (d.w.z. als er voor elke $\epsilon > 0$ een $N > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x_n, y_n) < \epsilon$). Het is eenvoudig na te gaan dat dit inderdaad een equivalentierelatie is.

Zij nu $\tilde{X}$ de quotiëntverzameling $R/\sim$. De equivalentieklasse van een Cauchyrijtje $(x_n)_{n \geq 0}$ noteren we met $[(x_n)_{n \geq 0}]$. We definiëren een metriek $\tilde{d}$ op $\tilde{X}$ door

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}] \text{ en } \tilde{y} = [(y_n)_{n \geq 0}].$$

Men kan nagaan dat de limiet bestaat, niet afhangt van de gekozen representanten van de klassen $\tilde{x}$ en $\tilde{y}$, en inderdaad een metriek op $\tilde{X}$ definieert. We definiëren $\iota: X \rightarrow \tilde{X}$ als volgt: voor $x \in X$ is $\iota(x)$ de klasse van het constante rijtje $(x_n)_{n \geq 0}$ met $x_n = x$ voor alle $n \geq 0$. Dan is ι duidelijk een isometrie.

Zij (Y, d_Y) een volledige metrische ruimte, en zij $f: (X, d) \rightarrow (Y, d_Y)$ een isometrie. Dan definiëren we

$$\begin{aligned} g: (\tilde{X}, \tilde{d}) &\longrightarrow (Y, d_Y) \\ \tilde{x} &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}]. \end{aligned}$$

Merk op dat g een welgedefinieerde afbeelding is, aangezien de rechterkant niet afhangt van de keuze van een representant $(x_n)_{n \geq 0}$ voor de equivalentieklasse $\tilde{x}$. Verder is g een isometrie omdat

$$\begin{aligned} d_Y(g(\tilde{x}), g(\tilde{y})) &= d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)\right) \\ &= d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n), f(y_n))\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \\ &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Voor alle $x \in X$ geldt

$$g(\iota(x)) = g([(x)_{n \geq 0}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x),$$

dus $g \circ \iota = f$. We moeten nagaan dat g de *unieke* voortzetting van f tot een isometrie $\tilde{X} \rightarrow Y$ is. Hiervoor merken we op dat

$$\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}],$$

en dus, als $h: \tilde{X} \rightarrow Y$ een isometrie is met $h \circ \iota = f$,

$$\begin{aligned} h(\tilde{x}) &= h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(\iota(x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ &= g(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Hieruit volgt de uniciteit van g . □

7. Topologische ruimten

Het gedrag van open en gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte met betrekking tot het nemen van verenigingen en doorsneden (propositie 2.2) blijkt zo fundamenteel te zijn dat deze eigenschappen als basis dienen voor de algemene definitie van topologische ruimten.

Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X zodanig dat geldt

- (0) $\emptyset$ en X zijn elementen van $\mathcal{T}$;
- (1) elke vereniging van elementen van $\mathcal{T}$ is een element van $\mathcal{T}$;
- (2) elke eindige doorsnede van elementen van $\mathcal{T}$ is een element van $\mathcal{T}$.

Een *topologische ruimte* is een paar $(X, \mathcal{T})$ met X een verzameling en $\mathcal{T}$ een topologie op X . De elementen van $\mathcal{T}$ heten *open deelverzamelingen* van $(X, \mathcal{T})$. Een *gesloten deelverzameling* van $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Opmerking. Omdat de vereniging (resp. doorsnede) van de lege collectie deelverzamelingen van X gelijk is aan $\emptyset$ (resp. X) volgt (0) in feite uit (1) en (2).

Opmerking. Uit de definitie volgen direct de eigenschappen van gesloten verzamelingen met betrekking tot verenigingen en doorsneden:

- (0) $\emptyset$ en X zijn gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$;
- (1) elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ is een gesloten deelverzameling van $(X, \mathcal{T})$;
- (2) elke eindige vereniging van gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ is een gesloten deelverzameling van $(X, \mathcal{T})$.

Voorbeelden. (1) Voor elke verzameling X is $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ een topologie op X . Deze heet de *triviale* of *chaotische topologie*.

(2) Voor elke verzameling X is de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ (de collectie van alle deelverzamelingen van X) een topologie op X . Deze heet de *discrete topologie*.

(3) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de verzameling van open deelverzamelingen van (X, d) (volgens de definitie van open deelverzamelingen in een metrische ruimte). Dan is $\mathcal{T}_d$ een topologie op X wegens propositie 2.2.

(4) Zij $\mathcal{T}$ de collectie deelverzamelingen van het complexe vlak $\mathbf{C}$ gedefinieerd door

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \setminus U \text{ is eindig}\}.$$

Dan is $(\mathbf{C}, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.

(5) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X . We definiëren

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Dit is een topologie op Y ; deze heet de *deelruimtetopologie* op Y , en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heet een (*topologische*) *deelruimte* van $(X, \mathcal{T}_X)$.

Net als voor metrische ruimten kunnen we een topologie ook karakteriseren met behulp van de omgevingen.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $x \in X$. Een *omgeving* van x in $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $U \in \mathcal{T}$ bestaat met $x \in U \subseteq N$.

Net als voor metrische ruimten is een open omgeving van x een open deelverzameling $U \subseteq X$ met $x \in U$.

Propositie 7.1. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.*

- (1) *Voor alle $x \in X$, elke omgeving N van x en elke deelverzameling M van X met $M \supseteq N$ is M een omgeving van x .*
- (2) *Voor alle $x \in X$ is de doorsnede van twee omgevingen van x ook een omgeving van x .*
- (3) *Een verzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een omgeving van x is voor elke $x \in U$.*

Bewijs. Bewering (1) volgt direct uit de definitie. Stel N, N' zijn omgevingen van x . Dan zijn er open verzamelingen U, U' met $x \in U \subseteq N$ en $x \in U' \subseteq N'$. Dan is $U \cap U'$ een open verzameling met $x \in U \cap U' \subseteq N \cap N'$; dit geeft (2). Het is duidelijk dat elke open verzameling U een omgeving van elke $x \in U$ is. Omgekeerd: stel U is een omgeving van x voor elke $x \in U$. Voor elke $x \in U$ kunnen we een open verzameling U_x kiezen met $x \in U_x \subseteq U$. Nu geldt

$$U \subseteq \bigcup_{x \in U} U_x \subseteq U,$$

dus beide inclusies zijn gelijkheden; in het bijzonder is U een vereniging van open verzamelingen en dus open. $\square$

De volgende propositie laat zien dat het begrip van omgeving gebruikt kan worden om een alternatieve definitie van topologische ruimten te geven.

Propositie 7.2. *Zij X een verzameling, en zij voor elke $x \in X$ een collectie $\mathcal{N}_x$ van deelverzamelingen van X gegeven zodanig dat de volgende uitspraken gelden voor alle $x \in X$:*

- (1) *voor alle $N \in \mathcal{N}_x$ geldt $x \in N$;*
- (2) *als $N \in \mathcal{N}_x$ en $M \supseteq N$, dan geldt $M \in \mathcal{N}_x$;*
- (3) *als $N, N' \in \mathcal{N}_x$, dan geldt $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$;*
- (4) *er is een $U \in \mathcal{N}_x$ zodanig dat $U \in \mathcal{N}_y$ voor alle $y \in U$.*

Dan is er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op X zodanig dat voor elke $x \in X$ de omgevingen van x in $(X, \mathcal{T})$ precies de elementen van $\mathcal{N}_x$ zijn.

Bewijs. (schets) We nemen voor $\mathcal{T}$ de verzameling van alle $U \subset X$ zodanig dat $U \in \mathcal{N}_x$ voor alle $x \in U$; dit is de enige mogelijkheid wegens propositie 7.1(3). Het bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is, wordt aan de lezer overgelaten. Zij tot slot $x \in X$ en $N \subseteq X$. Als N een omgeving van x is, dan is er een open verzameling U met $x \in U \subseteq N$; per constructie geldt $U \in \mathcal{N}_x$, dus ook $N \in \mathcal{N}_x$ wegens (2). Omgekeerd: voor $N \in \mathcal{N}_x$ kan men nagaan dat de verzameling

$$U = \{y \in N \mid N \in \mathcal{N}_y\}$$

een open verzameling is met $x \in U \subseteq N$. $\square$

Zoals we in voorbeeld (3) gezien hebben, is elke metrische ruimte op een natuurlijke manier op te vatten als topologische ruimte. Het is echter niet zo dat elke topologische ruimte op deze manier geconstrueerd kan worden. Een tegenvoorbeeld is $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$. Dan is $\{p\}$ niet gesloten. In een metrische ruimte zijn alle eindige verzamelingen echter gesloten, dus $\mathcal{T}$ komt niet af van een metriek op X .

In propositie 5.1 hebben we gezien dat het begrip van continuïteit voor afbeeldingen tussen metrische ruimten uitgedrukt kan worden in termen van open verzamelingen. Hierop baseren we de definitie van continue afbeeldingen tussen willekeurige topologische ruimten.

Definitie. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten. Een *continue afbeelding* van $(X, \mathcal{T}_X)$ naar $(Y, \mathcal{T}_Y)$ is een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{T}_Y$ geldt $f^{-1}U \in \mathcal{T}_X$.

Voorbeelden. (1) Elke continue afbeelding van een verzameling met de discrete topologie naar een willekeurige topologische ruimte is continu.

(2) Elke continue afbeelding van een willekeurige topologische ruimte naar een verzameling met de triviale topologie is continu.

(3) Neem $X = \mathbf{C}$ en zij $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \setminus U \text{ is eindig}\}$. Dan geldt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$, dus de identieke afbeelding op $\mathbf{C}$ definieert een continue afbeelding $(\mathbf{C}, \mathcal{T}_d) \rightarrow (\mathbf{C}, \mathcal{T})$.

Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan zijn er voor twee punten $x \neq y$ altijd open omgevingen U van x en V van y te vinden met lege doorsnede. (Neem bijvoorbeeld $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waarbij $r = d(x, y)/2$.) Deze eigenschap is nuttig, maar geldt niet voor alle topologische ruimten. Voor de eerder genoemde topologische ruimte $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$ geldt zelfs dat elke open omgeving van q ook p bevat, dus zijn er zeker geen disjuncte open omgevingen van p en q .

Definitie. Een *Hausdorffruimte* is een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan zodanig dat $U \cap V = \emptyset$.

Voorbeeld. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de topologie op X gedefinieerd door d . Dan is $(X, \mathcal{T}_d)$ een Hausdorffruimte: als x, y twee verschillende punten van X zijn en $r = d(x, y)/2$, dan zijn $B_r(x)$ en $B_r(y)$ disjuncte open omgevingen van x en y .

8. De producttopologie

Om de producttopologie in te voeren, hebben we eerst de volgende definities nodig.

Definitie. Een *basis* van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat elke open verzameling van X een vereniging van elementen van $\mathcal{B}$ is. Een *subbasis* van $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat de collectie van eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$ een basis van $\mathcal{T}$ is.

Gegeven een willekeurige collectie $\mathcal{S}$ van deelverzamelingen van X is er een unieke topologie op X waarvoor $\mathcal{S}$ een subbasis is.

We kunnen op het product van twee metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) een “productmetriek” definiëren. Net zo kunnen we op het product van twee topologische ruimten $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ een *producttopologie* definiëren. Dit is de “grofste” topologie zodanig dat de projecties $X \times Y \rightarrow X$ en $X \times Y \rightarrow Y$ continu zijn.

Definitie. De *producttopologie* op $X \times Y$ is de topologie $\mathcal{T}$ zodanig dat de verzameling

$$\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ open}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ open}\}$$

een subbasis voor $\mathcal{T}$ is.

9. Compactheid

Een fundamentele eigenschap van de reële getallen is het volgende feit, dat samenhangt met de volledigheid van $\mathbf{R}$.

Stelling 9.1 (Bolzano–Weierstraß). *Elke begrensde rij in $\mathbf{R}$ heeft een convergente deelrij.*

Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie. Een metrische ruimte (X, d) is *rijcompact* als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

Stelling 9.2 (Heine–Borel). *Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}$. Dan is X rijcompact dan en slechts dan als X gesloten en begrensd is.*

We zullen deze stelling hieronder als gevolg van een algemenere stelling afleiden. Daarnaast willen we de gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ karakteriseren op een manier waarin alleen de topologie en niet de metriek tot uitdrukking komt.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *open overdekking* van X is een deelverzameling $\mathcal{U}$ van $\mathcal{T}$ waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Definitie. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *compact* als er voor elke open overdekking $\mathcal{U}$ van X een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ bestaat waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.

De definitie van compactheid wordt vaak geformuleerd als “elke open overdekking heeft een eindige deelovertrekking”.

Voorbeelden. (1) Elke eindige topologische ruimte X is compact. Dit volgt direct uit het feit dat X maar eindig veel open verzamelingen heeft.

(2) De topologische ruimte $\mathbf{R}$ is niet compact. Bekijk bijvoorbeeld de open overdekking $\mathcal{U} = \{B_1(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ van $\mathbf{R}$. De vereniging van eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ is begrensd, en is dus niet gelijk aan $\mathbf{R}$; dit betekent dat $\mathcal{U}$ geen eindige deelovertrekking heeft.

Het begrip compactheid is vaak nuttig om toe te passen op deelruimten.

Propositie 9.3. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) *S (gezien als topologische deelruimte van X) is compact;*
- (2) *voor elke deelverzameling $\mathcal{U}$ van $\mathcal{T}$ met $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ bestaat er een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ waarvoor geldt $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.*

Bewijs. Dit is af te leiden uit het feit dat de open deelverzamelingen van S precies de verzamelingen van de vorm $U \cap S$ zijn met U een open deelverzameling van X . De details worden als opgave aan de lezer overgelaten. $\square$

We noemen een verzameling S als in de bovenstaande propositie een *compacte deelverzameling* van X . Een verzameling $\mathcal{U}$ als in de propositie heet ook wel een *open overdekking* van S (door open verzamelingen van X).

Propositie 9.4. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij Y een topologische deelruimte van X .*

- (a) *Als X compact is en Y gesloten is in X , dan is Y compact.*
- (b) *Als X een Hausdorffruimte is en Y compact is, dan is Y gesloten in X .*

Bewijs. (a) Zij $\mathcal{U}$ een overdekking van Y door open verzamelingen van X . Omdat Y gesloten is in X , is $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ een open overdekking van X . Wegens de compactheid van X heeft deze open overdekking een eindige deelooverdekking $\mathcal{U}'$. De doorsnede $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ is nu een eindige deelverzameling van $\mathcal{U}$ die Y overdekt.

(b) We bewijzen dat $X \setminus Y$ open is. Zij $x \in X \setminus Y$. Omdat X een Hausdorffruimte is, bestaan er voor alle $y \in Y$ open verzamelingen $U_y, V_y \subseteq X$ zodanig dat $x \in U_y$, $y \in V_y$ en $U_y \cap V_y = \emptyset$. De verzameling $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in Y\}$ vormen een overdekking van Y met open deelverzamelingen van X . Wegens de compactheid van Y is er een eindige deelooverdekking $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$; deze heeft de vorm $\{V_y \mid y \in S\}$ voor een eindige deelverzameling $S \subseteq Y$. Bekijk nu de open verzameling $U = \bigcap_{y \in S} U_y$. Deze U heeft lege doorsnede met V_y voor elke $y \in S$, en dus geldt $U \cap Y = \emptyset$. Hieruit volgt dat U een open omgeving van x is die binnen $X \setminus Y$ ligt. $\square$

Een nuttige eigenschap van compacte ruimten is dat het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding weer compact is.

Propositie 9.5. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zij C een compacte deelverzameling van X . Dan is $f(C)$ compact.*

Bewijs. We mogen aannemen dat geldt $C = X$ en $f(C) = Y$. Zij $\mathcal{V}$ een open overdekking van Y , en zij $\mathcal{U} = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\}$. Dan is $\mathcal{U}$ een open overdekking van X . Wegens de compactheid van X is er een eindige deelooverdekking $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Deze is van de vorm $\mathcal{U}' = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}'\}$ voor een eindige deelverzameling $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$. Als $x \in X$ bevat is in $f^{-1}V$, dan is $f(x)$ bevat in $f(f^{-1}V) \subseteq V$. Hieruit volgt dat $\mathcal{V}'$ een overdekking van Y is. $\square$

Definitie. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ tussen topologische ruimten heet *open* als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ de verzameling $f(U)$ open is in Y . Net zo heet een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ *gesloten* als voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ de verzameling $f(F)$ gesloten is in Y .

Gevolg 9.6. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y . Dan is f gesloten.*

Bewijs. Zij $F \subseteq X$ een gesloten deelverzameling. Wegens propositie 9.4(a) is F compact. Uit propositie 9.5 volgt dat $f(F)$ compact is. Tot slot volgt uit propositie 9.4(b) dat $f(F)$ gesloten is in Y . $\square$

De volgende herformulering van compactheid is vaak nuttig.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X de *eindige-doorsnijdings-eigenschap* heeft als er voor elke collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen met $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ een eindige deelverzameling $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ bestaat zodanig dat $\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F = \emptyset$.

Propositie 9.7. *Zij X een topologische ruimte. Dan is X compact dan en slechts dan als X de eindige-doorsnijdingseigenschap heeft.*

Bewijs. Dit volgt uit de definitie door het nemen van complementen. $\square$

We gaan terug naar metrische ruimten.

Zij (X, d) een metrische ruimte. De *diameter* van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is gedefinieerd (zie opgave 7 van blad 1) als

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Stelling 9.8 (Cantor). *Zij X een volledige metrische ruimte. Stel dat $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ gesloten en niet-lege verzamelingen zijn zodanig dat $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Dan bevat $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ precies één punt.*

Bewijs. (Schets.) We kiezen een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X zodanig dat $x_n \in F_n$ voor alle n . Dan is $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij en heeft wegens de volledigheid van X een limiet x . Deze limiet ligt in $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ omdat de F_n gesloten zijn. Tot slot is het eenvoudig na te gaan dat $\text{diam}(F) = 0$, zodat F niet meer dan één punt kan bevatten. $\square$

De volgende stelling kan gezien worden als een generalisatie van de stelling van Heine–Borel (gebruik dat gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ hetzelfde zijn als volledige en totaal begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$).

Stelling 9.9. *Zij (X, d) een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is compact;
- (2) X is rijcompact;
- (3) X is volledig en totaal begrensd.

Bewijs. We bewijzen de implicaties $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$.

$(1) \implies (2)$ Stel X is compact. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X . We willen een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ construeren. Voor alle $n \geq 0$ definiëren we F_n als de afsluiting van de verzameling $\{x_m \mid m \geq n\}$. Dan is de doorsnede van eindig veel F_n niet-leeg. Wegens de eindige-doorsnijdingseigenschap is de doorsnede van alle F_n ook niet-leeg. We kiezen een punt $x \in \bigcap_{n \geq 0} F_n$. Zij $n_0 = 0$. Voor alle $k \geq 1$ is er wegens het feit dat x in $F_{n_{k-1}+1}$ ligt een $n_k > n_{k-1}$ zodanig dat $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{2}d(x_{n_{k-1}}, x)$. De rij $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergeert nu naar x .

$(2) \implies (3)$ Stel X is rijcompact. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in X . Wegens de rijcompactheid heeft $(x_n)_{n \geq 0}$ een convergente deelrij. Zij x de limiet van deze deelrij. Dan convergeert ook de hele rij $(x_n)_{n \geq 0}$ naar x . Hieruit volgt dat X volledig is. Stel nu dat X niet totaal begrensd is. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat X niet overdekt kan worden door eindig veel ballen van straal ϵ . We willen een rij construeren zonder convergente deelrij. Kies $x_0 \in X$. Dan is $B_\epsilon(x_0)$ niet gelijk aan X , dus er bestaat $x_1 \in X \setminus B_\epsilon(x_0)$. Nu is ook $B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1)$ niet gelijk aan X , dus er bestaat $x_2 \in X \setminus (B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1))$. Inductief construeren we zo een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ met de eigenschap dat $x_{n+1} \notin B_\epsilon(x_0) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_n)$. Hieruit volgt dat $(x_n)_{n \geq 0}$ geen deelrij heeft die een Cauchyrij is (twee verschillende punten liggen altijd minstens ϵ van elkaar vandaan), tegenspraak. Dus X is totaal begrensd.

$(3) \implies (1)$ Stel X is volledig en totaal begrensd. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X . Stel dat $\mathcal{U}$ geen eindige deelovertrekking heeft. Er bestaat daarentegen wel een eindige overdekking van X met open ballen van straal 1. Omdat $\mathcal{U}$ geen eindige deelovertrekking heeft, is er dus een $x_0 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Wel kan X , en dus ook $B_1(x_0)$, overdekt worden met eindig veel open ballen van straal $1/2$ in X ; er is dus een $x_1 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0) \cap B_{1/2}(x_1)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Zo verdergaand construeren we een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X zodanig dat de open verzameling $V_n = B_1(x_0) \cap \dots \cap B_{2^{-n}}(x_n)$ in X niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Voor $n \geq 0$ definiëren we F_n als de afsluiting van V_n . Dan is de diameter van F_n ten hoogste 2^{1-n} . Omdat X volledig is, bevat $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ wegens stelling 9.8 precies één punt x . Kies $U_0 \in \mathcal{U}$ met $x \in U_0$. Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ met $B_\epsilon(x) \subseteq U_0$. Zij $n \geq 0$ zodanig dat

$2^{1-n} < \epsilon$, dan geldt $F_n \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U_0$. In het bijzonder is $\{U_0\}$ een eindige overdekking van V_n door open verzamelingen in $\mathcal{U}$, een tegenspraak. $\square$

Het volgende feit is een bijzonder nuttige eigenschap van compacte ruimten.

Stelling 9.10. *Zij X een niet-lege compacte topologische ruimte, en zij $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ een continue functie. Dan neemt f een maximum en minimum aan op X .*

(Oftewel: er bestaan $a, b \in X$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.)

Bewijs. Omdat X compact is, is $f(X)$ compact wegens propositie 9.5. Uit de stelling van Heine–Borel volgt nu dat $f(X)$ gesloten en begrensd is. Omdat X niet-leeg is, geldt hetzelfde voor $f(X)$; dit impliceert dat $f(X)$ een minimaal en een maximaal element heeft. $\square$

10. Homeomorfismen

We voeren nu een begrip in dat zegt wanneer twee topologische ruimten “topologisch hetzelfde” zijn.

Definitie. Een *homeomorfisme* tussen topologische ruimten X en Y is een continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat er een continue afbeelding $g: Y \rightarrow X$ bestaat zodanig dat $g \circ f$ de identiteit op X is en $f \circ g$ de identiteit op Y is.

Propositie 10.1. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) f is een homeomorfisme;
- (2) f is bijectief, continu en open;
- (3) f is bijectief, continu en gesloten.

Bewijs. Opgave. $\square$

Voorbeelden. (1) Zijn (X, d) en (Y, d) metrische ruimten, en zij $f: X \rightarrow Y$ een bijectieve isometrie. Vatten we X en Y op als topologische ruimten, dan is f een homeomorfisme.

(2) De afbeelding $x \mapsto \tan x$ is een homeomorfisme van het open interval $(-\pi/2, \pi/2)$ naar de reële lijn $\mathbf{R}$ met inverse $y \mapsto \arctan y$.

(3) De afbeelding $(r, \theta) \mapsto (r/(1-r), \theta)$ is een homeomorfisme van de open eenheidsschijf naar $\mathbf{R}^2$ met inverse $(u, \theta) \mapsto (u/(1+u), \theta)$.

(4) Een koffiekop en een donut zijn homeomorf.

Stelling 10.2. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een bijectieve continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y . Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Wegens propositie 10.1 volstaat het om te bewijzen dat f gesloten is. Dit hebben we echter gezien in gevolg 9.6. $\square$

11. De stelling van Tichonov

Een van de belangrijkste stellingen uit de topologie is de stelling van Tichonov (alternatieve transliteraties: Tikhonov, Tichonow, Tychonoff enz.).

Stelling 11.1 (Tichonov). *Elk product van compacte topologische ruimten is compact.*

De stelling in deze algemene vorm is equivalent met het keuzeaxioma. We zullen de stelling hier alleen voor een product van eindig veel compacte ruimten bewijzen. Door inductie volgt deze versie uit de onderstaande stelling voor een product van twee compacte ruimten.

Stelling 11.2. *Zijn X en Y twee compacte topologische ruimten. Dan is $X \times Y$ compact.*

Bewijs. Zij $\mathcal{W}$ een open overdekking van $X \times Y$. Laten we een deelverzameling $S \subseteq X \times Y$ klein noemen als S overdekt kan worden door eindig veel verzamelingen van $\mathcal{W}$. We moeten dus bewijzen dat $X \times Y$ klein is. We merken eerst op dat er voor elke $(a, b) \in X \times Y$ een $W \in \mathcal{W}$ is met $(a, b) \in W$, en dat er open verzamelingen $U_{a,b} \subseteq X$ en $V_{a,b} \subseteq Y$ met $(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq W$. De verzamelingen $U_{a,b} \times V_{a,b}$ met $(a, b) \in X \times Y$ vormen dus een overdekking van $X \times Y$ door *kleine* deelverzamelingen.

We beweren nu dat er voor elke $a \in X$ een open omgeving U_a van a bestaat zodanig dat $U_a \times Y$ klein is. De $V_{a,b}$ voor $b \in Y$ overdekken namelijk Y , dus wegens de compactheid van Y is er een eindige deelverzameling $T \subseteq Y$ zodanig dat $\bigcup_{b \in T} V_b = Y$. Zij $U_a = \bigcap_{b \in T} U_{a,b}$; dan geldt $U_a \times Y \subseteq \bigcup_{b \in T} U_{a,b} \times V_{a,b}$, dus $U_a \times Y$ is klein.

De open verzamelingen U_a met $a \in X$ overdekken X . Omdat X compact is, is er een eindige deelverzameling $S \subseteq X$ zodanig dat $\bigcup_{a \in S} U_a = X$. We merken nu op dat $X \times Y = \bigcup_{a \in S} U_a \times Y$, dus $X \times Y$ is klein. $\square$

12. Lokaal compacte ruimten; compactificaties

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. We noemen $(X, \mathcal{T})$ *lokaal compact* als er voor elke $x \in X$ een (niet noodzakelijk open) omgeving N van x bestaat zodanig dat N compact is.

Voorbeelden. Compacte ruimten, $\mathbf{R}^n$, discrete ruimten.

Een veel gebruikte techniek is het *compactificeren* van topologische ruimten.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van $(X, \mathcal{T})$ is een compacte Hausdorffruimte $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ samen met een continue afbeelding $\iota: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ zodanig dat $\iota: X \rightarrow \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_\infty \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

Stelling 12.1. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Dan heeft $(X, \mathcal{T})$ een eenpuntscompactificatie $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$, en deze is op homeomorfismen na uniek bepaald.*

Bewijs. Zij X_∞ de verzameling $X \sqcup \{\infty\}$. We definiëren een topologie $\mathcal{T}_\infty$ op X_∞ door

$$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{X_\infty \setminus K \mid K \subset X \text{ is compact}\}.$$

De collectie van complementen van verzamelingen in $\mathcal{T}_\infty$ is

$$\mathcal{F}_\infty = \{F \cup \{\infty\} \mid F \subseteq X \text{ is gesloten}\} \cup \{K \mid K \subset X \text{ is compact}\}.$$

We gaan na dat $\mathcal{T}_\infty$ een topologie is door te bewijzen dat $\mathcal{F}_\infty$ de eigenschappen van de collectie van gesloten verzamelingen heeft. Ten eerste is duidelijk dat $\emptyset, X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$. Zijn $F, F' \in \mathcal{F}_\infty$. Als $\infty \in F \cup F'$, dan is $F \cup F'$ van de vorm $F'' \cup \{\infty\}$ met F'' gesloten

(gebruik dat compacte deelverzamelingen van X gesloten zijn). Anders is $F \cup F'$ een vereniging van twee compacte verzamelingen en is dus weer compact.

Zij $\mathcal{G}$ een willekeurige deelverzameling van $\mathcal{F}_\infty$. Als $\infty \in F$ voor alle $F \in \mathcal{G}$, dan is $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$ van de vorm $F \cup \{\infty\}$ met F gesloten in X . Anders bevat $\mathcal{G}$ een compacte deelverzameling K van X , en geldt

$$\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{G}} (F \cap K)$$

De verzamelingen rechts is een doorsnede van gesloten deelverzamelingen van de compacte ruimte K , is dus zelf gesloten in K en is dus een compacte deelverzameling van X .

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{F}_\infty)$ compact is. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X_∞ . Dan is er minstens een $U \in \mathcal{U}$ met $\infty \in U$. Zij $K = X_\infty \setminus U$; dan is $X = U \cup K$ en het volstaat te bewijzen dat K een eindige overdekking door elementen van $\mathcal{U}$ heeft. Dit volgt echter uit het feit dat $U \cap X$ open is in X voor elke $U \in \mathcal{F}_\infty$ en K compact is.

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{F}_\infty)$ een Hausdorffruimte is. Zijn $x, y \in X_\infty$ verschillend. Als $x, y \neq \infty$, dan bestaan er disjuncte open omgevingen van x en y in X (en dus in X_∞) omdat X een Hausdorffruimte is. We mogen dus aannemen dat $x \in X$ en $y = \infty$. Omdat X lokaal compact is, bestaan er $U \subseteq X$ open en $K \subseteq X$ compact met $x \in U \subseteq K$. Verder is $X_\infty \setminus K$ een open omgeving van ∞ in X_∞ . Hiermee zijn U en $X_\infty \setminus K$ disjuncte open omgevingen van x en ∞ in X_∞ .

De natuurlijke inbedding $\iota: X \rightarrow X_\infty$ is een homeomorfisme naar $\iota(X)$ omdat $\{U \cap X \mid U \in \mathcal{T}_\infty\} = \mathcal{T}$.

Om te bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ op homeomorfismen na uniek is, nemen we aan dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een andere eenpuntscompactificatie is. Dan kunnen we een voor de hand liggende bijectie $f: X'_\infty \rightarrow X_\infty$ construeren. We merken nu op dat de topologie $\mathcal{T}_\infty$ “minimaal” is in de zin dat voor alle $U \in \mathcal{T}_\infty$ de eis dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een compacte Hausdorffruimte is, impliceert dat $f^{-1}U$ open is. Dit betekent dat f een continue afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffruimte is. Wegens stelling 10.2 is f een homeomorfisme. $\square$

13. Samenhang

We hebben gezien (opgave 2 van blad 1) dat in de metrische ruimte $\mathbf{R}$ de enige deelverzamelingen die zowel open als gesloten zijn, de lege verzameling en $\mathbf{R}$ zelf zijn. Dit is een eigenschap die bekendstaat als *samenhang* (of *samenhangendheid*).

Definitie. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is *samenhangend* als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.

In het bijzonder wordt $\emptyset$ niet beschouwd als samenhangend. Voor elke topologische ruimte X zijn $\emptyset$ en X zowel open als gesloten, dus X is samenhangend dan en slechts dan als X niet-leeg is en $\emptyset$ en X de enige deelverzamelingen van X zijn die zowel open als gesloten zijn.

Opmerking. In het boek (Runde, Definition 3.4.7) wordt de lege verzameling wel als samenhangend beschouwd, maar dit is niet de algemeen gangbare conventie.

Voorbeeld. Een discrete ruimte X is samenhangend dan en slechts dan als X uit precies één punt bestaat.

Propositie 13.1. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- (1) X is samenhangend;
- (2) X is niet leeg, en als U en V open verzamelingen zijn waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$, dan geldt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$;
- (3) er bestaan precies twee continue afbeeldingen van X naar $\{0, 1\}$ (met de discrete topologie), namelijk de constante functie 0 en de constante functie 1.

Bewijs. De equivalentie van (1) en (2) is in te zien door op te merken dat verzamelingen U en V als in (2) zowel open als gesloten zijn, aangezien ze elkaars complement zijn. De equivalentie van (1) en (3) is opgave 9 van blad 5. $\square$

Voorbeeld. Het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ is samenhangend. Wegens de tussenwaardstelling is elke continue functie $f: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ namelijk constant, dus er bestaan precies twee continue afbeeldingen van $[0, 1]$ naar $\{0, 1\}$.

Propositie 13.2. Het beeld van een samenhangende ruimte onder een continue afbeelding is samenhangend.

Bewijs. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding. Stel dat U en V open deelverzamelingen van $f(X)$ zijn zodanig dat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = f(X)$. Zij $U' = f^{-1}U$ en $V' = f^{-1}V$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = X$. Omdat X samenhangend is, geldt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$. We concluderen dat $f(X)$ samenhangend is. $\square$

Een definitie van samenhang die op het eerste gezicht intuïtiever lijkt, is als volgt.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *weg* of *pad* in X is een continue afbeelding

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow X.$$

Als $x = \gamma(0)$ en $y = \gamma(1)$, dan noemen we γ een *weg* (of *pad*) van x naar y .

Definitie. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is *wegsamenhangend* als er voor alle $x, y \in X$ een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y bestaat.

Propositie 13.3. Het beeld van een wegsamenhangende ruimte onder een continue afbeelding is wegsamenhangend.

Bewijs. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding. Gegeven twee punten in $f(X)$, die we kunnen schrijven als $f(x)$ en $f(y)$ met $x, y \in X$, bestaat er wegens de wegsamenhang van X een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y . De afbeelding $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow f(X)$ is nu een weg van $f(x)$ naar $f(y)$. We concluderen dat $f(X)$ wegsamenhangend is. $\square$

Propositie 13.4. Elke wegsamenhangende topologische ruimte is samenhangend.

Bewijs. Stel X is een wegsamenhangende ruimte die niet samenhangend is. Dan kunnen we X schrijven als disjuncte vereniging $U \sqcup V$ met U, V open en verschillend van $\emptyset$ en X . De functie

$$f: X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \in U, \\ 1 & \text{als } x \in V \end{cases}$$

is continu. Kies $x \in U$ en $y \in V$; dan bestaat er een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y . De functie $g = f \circ \gamma$ is nu echter een continue functie met $g(0) = f(x) = 0$ en $g(1) = f(y) = 1$, hetgeen de samenhang van $[0, 1]$ tegensprekt. $\square$

Samenhang en wegsamenhang zijn niet equivalent. Hieronder geven we een voorbeeld van een topologische ruimte X die wel samenhangend, maar niet wegsamenhangend is. Om te laten zien dat X samenhangend is, hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 13.5. *Zij X een topologische ruimte, en zij Y een dichte deelverzameling van X die samenhangend is. Dan is X samenhangend.*

Bewijs. Stel U, V zijn open deelverzamelingen van X zodanig dat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$. We schrijven $U' = U \cap Y$ en $V' = V \cap Y$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = Y$. Uit de aanname dat Y samenhangend is, volgt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Wegens symmetrie mogen we aannemen $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $Y \subseteq U$. Omdat Y dicht is, impliceert dit $\bar{U} = X$. Aangezien U gesloten is, concluderen we $U = X$. $\square$

Voorbeeld. Zij Y de verzameling $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ in $\mathbf{R}^2$, en zij X de afsluiting van Y in $\mathbf{R}^2$. Dan is Y dicht in X , en (als beeld van een continue afbeelding $(0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2$) samenhangend. Wegens propositie 13.5 is ook X samenhangend.

We beweren dat X niet wegsamenhangend is. Zij Z de gesloten deelverzameling $\{0\} \times [-1, 1] = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ van X . Stel dat er een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ bestaat met $\gamma(0) \in Z$ en $\gamma(1) \in Y$. De deelverzameling $\gamma^{-1}Z$ van $[0, 1]$ is gesloten en niet-leeg, en bevat dus een maximaal element a . Uit $\gamma(1) \in Y$ volgt $a < 1$. Door γ te beperken tot $[a, 1]$ krijgen we een continue functie $\gamma: [a, 1] \rightarrow X$ met $\gamma(a) \in Z$ en $\gamma((a, 1]) \subseteq Y$. Het beeld $\gamma([a, 1])$ is compact en dus gesloten en begrensd in $\mathbf{R}^2$. Hieruit is af te leiden dat $\gamma([a, 1])$ de verzameling Z bevat. Er geldt echter $\gamma([a, 1]) \cap Z = \{\gamma(a)\}$, tegenspraak. $\square$

14. Aaneenschakeling en omkering van wegen

De volgende begrippen zijn erg nuttig bij het redeneren over wegen.

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg. De *omkering* van γ is de weg

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(1 - t). \end{aligned}$$

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ twee wegen met de eigenschap dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. De *aaneenschakeling* van γ_1 en γ_2 is de weg

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{als } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Gegeven een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ schrijven we $x \sim_p y$ als er een weg van x naar y bestaat. Met behulp de bovenstaande definities is eenvoudig in te zien dat $\sim_p$ een equivalentierelatie op X is.

15. Wegsamenhangscomponenten

We gaan nu twee manieren bekijken waarop een topologische ruimte op een natuurlijke manier “opgedeeld kan worden”: in samenhangscomponenten en in wegsamenhangscomponenten. We beginnen met wegsamenhangscomponenten, omdat deze intuïtief makkelijker te begrijpen zijn.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *wegsamenhangscomponent* van $(X, \mathcal{T})$ is een equivalentieklasse voor de equivalentierelatie $\sim_p$ op X .

Propositie 15.1. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Dan is X als verzameling de disjuncte vereniging van de wegsamenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$.*

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat een verzameling door een equivalentierelatie opgedeeld wordt in een disjuncte vereniging van equivalentieklassen. $\square$

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De *wegsamenghangscomponent van x (in X)* is de equivalentieklasse van x met betrekking tot $\sim_p$.

Een wegsamenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ is hetzelfde als een maximale wegsamenhangende deelruimte van $(X, \mathcal{T})$, d.w.z. een wegsamenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere wegsamenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat. De wegsamenhangscomponent van x is de unieke wegsamenhangscomponent van X die x bevat, oftewel de maximale wegsamenhangende deelruimte van X die x bevat.

Voorbeeld. De wegsamenhangscomponenten in het eerdere voorbeeld zijn Y en Z .

We gaan nu in op de vraag voor welke topologische ruimten de begrippen samenhang en wegsamenhang hetzelfde zijn. We zullen later zien (in propositie 16.3) dat dit het geval is wanneer elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Hiervoor hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 15.2. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Dan is elke wegsamenhangscomponent van X zowel open als gesloten.*

Bewijs. Zij Y een wegsamenhangscomponent van X , en zij $y \in Y$. Per aanname is er een wegsamenhangende omgeving N van y in X . Omdat Y de wegsamenhangscomponent van x is, geldt $N \subseteq Y$. Elke $y \in Y$ heeft dus een omgeving die in Y bevat is, dus Y is open. Uit het feit dat Y het complement is van de vereniging van alle wegsamenhangscomponenten verschillend van X , en deze zelf open zijn, volgt dat Y gesloten is. $\square$

16. Samenhangscomponenten

Een gerelateerde notie is de volgende.

Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *samenhangscomponent* van $(X, \mathcal{T})$ is een maximale samenhangende deelruimte van $(X, \mathcal{T})$, d.w.z. een samenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere samenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat.

Propositie 16.1. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{S}$ een niet-lege collectie samenhangende deelruimten van X zodanig dat voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}$ geldt $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Dan is $Z = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}} Y$ samenhangend.*

Bewijs. Stel dat Z niet samenhangend is. Dan bestaat er een niet-constante functie $f: Z \rightarrow \{0, 1\}$. Omdat elke $Y \in \mathcal{S}$ samenhangend is, is f op elke $Y \in \mathcal{S}$ constant. Kies $Y \in \mathcal{S}$ waarop f constant 0 is, en $Y' \in \mathcal{S}$ waarop f constant 1 is. Op de niet-lege doorsnede van Y en Y' is f dan zowel 0 als 1, tegenspraak. $\square$

Stelling 16.2. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.*

- (a) *Als verzameling is X de disjuncte vereniging van de samenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$.*

(b) De samenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$ zijn gesloten.

Bewijs. Voor (a) moeten we laten zien dat elk punt $x \in X$ in precies één samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ ligt. Zij $\mathcal{S}_x$ de collectie van alle samenhangende deelruimten $Y \subseteq X$ met $x \in Y$. Dan is $\mathcal{S}_x$ niet-leeg (er geldt $\{x\} \in \mathcal{S}_x$), en voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}_x$ geldt $x \in Y \cap Y'$. Uit propositie 16.1 volgt dat de verzameling $X_x = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}_x} Y$ samenhangend is en dus het unieke maximale element van $\mathcal{S}_x$ is. Dit impliceert dat X_x een samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ is. Er bestaat dus een samenhangscomponent van X waar x in ligt. Verder volgt uit propositie 16.1 dat de doorsnede van twee verschillende samenhangscomponenten leeg is. Dit betekent dat X_x de *unieke* samenhangscomponent van X is waar x in ligt.

We bewijzen nu (b). Zij Z een samenhangscomponent van X . We merken op dat Z dicht is in de afsluiting $\bar{Z}$ van Z in X ; wegens propositie 13.5 is $\bar{Z}$ ook samenhangend. Uit de maximaliteit van samenhangscomponenten volgt $\bar{Z} = Z$, dus Z is gesloten. $\square$

Opmerking. Het analogon van stelling 16.2(b) geldt niet voor wegsamenhangscomponenten: deze zijn niet automatisch gesloten.

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De *samenhangscomponent van x (in X)* is de unieke samenhangscomponent van X die x bevat.

Propositie 16.3. Zij X een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft.

- (a) De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X .
- (b) X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.

Bewijs. (a) Zij Y een wegsamenhangscomponent van X . Dan is Y samenhangend en dus bevat in een unieke samenhangscomponent Z van X . Wegens propositie 15.2 is Y open en gesloten in X , en dus ook in Z . Uit het feit dat Z samenhangend is en Y niet-leeg is, volgt $Y = Z$.

(b) Dit volgt direct uit (a). $\square$

17. Lokale (weg)samenhang

De hierboven gegeven definities hebben ook “lokale analoga”.

Definitie. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *lokaal samenhangend* (respectievelijk *lokaal wegsamenhangend*) als er voor elke $x \in X$ en elke omgeving N van x een samenhangende (respectievelijk wegsamenhangende) omgeving N' van x bestaat met $N' \subseteq N$.

(Met andere woorden: X is lokaal (weg)samenhangend als $\mathcal{N}_x$ voor elke $x \in X$ een basis heeft die bestaat uit (weg)samenhangende verzamelingen; zie Runde, Definition 3.4.20.)

Gevolg 17.1. Zij X een lokaal wegsamenhangende topologische ruimte.

- (a) De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X .
- (b) X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.

Bewijs. Omdat X lokaal wegsamenhangend is, heeft elk punt van X een wegsamenhangende omgeving. Beide beweringen volgen nu uit propositie 16.3. $\square$

Propositie 17.2. *Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte.*

(a) *Elke open deelverzameling $U \subset X$ (voorzien van de deelruimtetopologie) is lokaal samenhangend.*

(b) *Elke samenhangscomponent van X is open in X .*

Bewijs. (a) Zij $x \in U$, en zij N een omgeving van x in U . Omdat U open is in X , is N ook een omgeving van x in X . Aangezien X lokaal samenhangend is, bestaat er een samenhangende omgeving N' van x in X met $N' \subseteq N$. Deze N' is tevens een samenhangende omgeving van x in U .

(b) Zij Y een samenhangscomponent van X . Omdat X lokaal samenhangend is, heeft elke $y \in Y$ een samenhangende omgeving N_y in X . Omdat Y een samenhangscomponent van X is, geldt $N_y \subseteq Y$. We zien dus dat Y de vereniging is van de verzamelingen N_y voor $y \in Y$. Hieruit volgt dat Y open is in X . $\square$

Propositie 17.3. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) *X is lokaal samenhangend;*

(2) *$\mathcal{T}$ heeft een basis die bestaat uit samenhangende verzamelingen.*

Bewijs. De implicatie (2) $\implies$ (1) is eenvoudig na te gaan.

We bewijzen (1) $\implies$ (2). Zij $x \in X$, en zij U een open omgeving van x . Wegens propositie 17.2(b) is U lokaal samenhangend. Zij V de samenhangscomponent van x in U . Dan is V open in U wegens propositie 17.2(a). Aangezien U open is in X , is V ook open in X , dus V is een samenhangende open omgeving van x in X met $V \subseteq U$. Hieruit volgt dat $\mathcal{T}$ een basis heeft die bestaat uit samenhangende verzamelingen. $\square$

Propositie 17.4. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) *X is lokaal wegsamenhangend;*

(2) *$\mathcal{T}$ heeft een basis die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen.*

Bewijs. We bewijzen (1) $\implies$ (2); het bewijs van de implicatie (2) $\implies$ (1) wordt aan de lezer overgelaten. Stel dat X lokaal wegsamenhangend is. Zij U een open deelverzameling van X . Dan bestaat er voor elke $x \in U$ een wegsamenhangende open omgeving V_x van x die bevat is in U , en de open verzameling U is de vereniging van de wegsamenhangende deelverzamelingen V_x . Hieruit volgt dat $\mathcal{T}$ een basis heeft die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen. $\square$

18. Homotopie

Het begrip *homotopie* betekent intuïtief dat twee continue afbeeldingen $f, g: X \rightarrow Y$ “in elkaar vervormd kunnen worden”.

Definitie. Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zijn $f, g: X \rightarrow Y$ twee continue afbeeldingen. Een *homotopie* van f naar g is een continue afbeelding

$$F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

(waarbij $[0, 1] \times X$ voorzien is van de producttopologie) zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{en} \quad F(1, x) = g(x).$$

We zeggen dat f en g *homotoop* zijn, notatie $f \sim g$, als er een homotopie van f naar g bestaat.

Propositie 18.1. *De homotopierelatie $\sim$ op de verzameling van continue afbeeldingen $X \rightarrow Y$ is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Elke continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ is homotoop met zichzelf via de homotopie

$$\begin{aligned} F: [0, 1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Dit betekent dat $\sim$ reflexief is.

Als $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g is, dan is de afbeelding

$$\begin{aligned} G: [0, 1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto F(1 - t, x) \end{aligned}$$

een homotopie van g naar f . Dit betekent dat $\sim$ symmetrisch is.

Zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g , en zij $G: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van g naar h . Dan is

$$\begin{aligned} H: [0, 1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto \begin{cases} F(2t, x) & \text{als } t \in [0, 1/2], \\ G(2t - 1, x) & \text{als } t \in [1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

een homotopie van f naar h . Dit betekent dat $\sim$ transitief is. $\square$

Voorbeelden. (1) De twee afbeeldingen $f, g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x, y) \quad \text{en} \quad g(x, y) = (0, 0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$F(t, (x, y)) = (1 - t)(x, y).$$

(2) Bekijk de eenheidscirkel

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

en de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De twee afbeeldingen $f, g: S^1 \rightarrow S^2$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (0, 0, 1) \quad \text{en} \quad g(x, y) = (x, y, 0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$\begin{aligned} F: [0, 1] \times S^1 &\longrightarrow S^2 \\ (t, (x, y)) &\longmapsto (tx, ty, \sqrt{1 - t^2}). \end{aligned}$$

Een belangrijk soort continue afbeeldingen zijn wegen $[0, 1] \rightarrow X$. Het hierboven gedefinieerde begrip homotopie is echter niet erg zinvol voor wegen. Als $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ namelijk een weg van x_0 naar x_1 is, dan is γ homotoop met de constante weg $s \mapsto x_0$ via de homotopie

$$\begin{aligned} F: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \gamma((1 - t)s). \end{aligned}$$

Om deze reden voeren we een gerelateerde definitie in die geschikter is voor wegen in X .

Notatie. Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. We schrijven $P(X; x_0, x_1)$ voor de verzameling van alle wegen van x_0 naar x_1 .

Definitie. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen van x_0 naar x_1 . Een *weghomotopie* van γ naar γ' is een continue afbeelding

$$\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

zodanig dat voor alle $s, t \in [0, 1]$ geldt

$$\begin{aligned}\Gamma(0, s) &= \gamma(s), & \Gamma(1, s) &= \gamma'(s), \\ \Gamma(t, 0) &= x_0, & \Gamma(t, 1) &= x_1.\end{aligned}$$

We zeggen dat γ en γ' *weghomotoop* zijn, notatie $\gamma \simeq \gamma'$, als er een weghomotopie van γ naar γ' bestaat.

Propositie 18.2. *Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan is de weghomotopierelatie $\simeq$ op de verzameling $P(X; x_0, x_1)$ een equivalentierelatie.*

Bewijs. Dit gaat op dezelfde manier als het bewijs van propositie 18.1. $\square$

Lemma 18.3. *Zijn $x_0, x_1, x_2 \in X$ drie punten. Stel dat $\gamma_0, \gamma'_0 \in P(X; x_0, x_1)$ en $\gamma_1, \gamma'_1 \in P(X; x_1, x_2)$ wegen zijn zodanig dat $\gamma_0 \simeq \gamma'_0$ en $\gamma_1 \simeq \gamma'_1$. Dan zijn de aaneenschakelingen $\gamma_0 \odot \gamma_1$ en $\gamma'_0 \odot \gamma'_1$ in $P(X; x_0, x_2)$ weghomotoop.*

Bewijs. Zij Γ_0 een weghomotopie van γ_0 naar γ'_0 , en zij Γ_1 een weghomotopie van γ_1 naar γ'_1 . We bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned}\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \begin{cases} \Gamma_0(t, 2s) & \text{als } s \in [0, 1/2], \\ \Gamma_1(t, 2s - 1) & \text{als } s \in [1/2, 1]. \end{cases}\end{aligned}$$

Dan is Γ continu, en door $t = 0$ en $t = 1$ in te vullen, zien we dat Γ een weghomotopie van $\gamma_0 \odot \gamma_1$ naar $\gamma'_0 \odot \gamma'_1$ is. $\square$

Een belangrijk voorbeeld van weghomotopie is herparametrisatie van wegen (verandering van variabelen).

Lemma 18.4. *Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg. Bekijk twee functies*

$$\phi_1, \phi_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

zodanig dat voor zekere $s_0, s_1 \in [0, 1]$ geldt

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = s_0, \quad \phi_1(1) = \phi_2(1) = s_1.$$

Dan zijn de “geherparametriseerde wegen” $\gamma \circ \phi_1$ en $\gamma \circ \phi_2$ in $P(X; \gamma(s_0), \gamma(s_1))$ weghomotoop.

Bewijs. Dit is intuïtief duidelijk: het enige verschil tussen de wegen $\gamma \circ \phi_1$ en $\gamma \circ \phi_2$ is dat ze met een andere snelheid doorlopen worden. We bekijken de functie

$$\begin{aligned}\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \gamma((1 - t)\phi_1(s) + t\phi_2(s)).\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\Gamma(0, s) &= \gamma(\phi_1(s)) = (\gamma \circ \phi_1)(s), & \Gamma(1, s) &= \gamma(\phi_2(s)) = (\gamma \circ \phi_2)(s), \\ \Gamma(t, 0) &= \gamma(s_0), & \Gamma(t, 1) &= \gamma(s_1).\end{aligned}$$

Dit laat zien dat Γ een weghomotopie van $\gamma \circ \phi_1$ naar $\gamma \circ \phi_2$ is. $\square$

Lemma 18.5. *Zijn $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$ vier punten. Voor alle wegen $\gamma_0 \in P(X; x_0, x_1)$, $\gamma_1 \in P(X; x_1, x_2)$ en $\gamma_2 \in P(X; x_2, x_3)$ zijn de wegen $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ weghomotoop.*

Bewijs. We geven eerst de vergelijkingen voor de wegen in kwestie:

$$\begin{aligned} ((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s) &= \begin{cases} \gamma_0(4s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \gamma_1(4s - 1) & \text{als } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} \\ (\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2))(s) &= \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_1(4s - 2) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \gamma_2(4s - 3) & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

We passen het vorige lemma toe met

$$\gamma = (\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$$

en

$$\phi_1(s) = s, \quad \phi_2(s) = \begin{cases} s/2 & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ s - 1/4 & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ 2s - 1 & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(s) \\ &= ((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(s/2) = \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(s - 1/4) = \gamma_1(4s - 2) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \gamma(2s - 1) = \gamma_2(4s - 3) & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2))(s). \end{aligned}$$

We zien dus dat $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ herparametrisaties van elkaar zijn, en daarmee weghomotoop zijn. $\square$

Lemma 18.6. *Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. Schrijf γ_0 (resp. γ_1) voor de constante weg $s \mapsto x_0$ (resp. $s \mapsto x_1$). Dan geldt*

$$\gamma \simeq \gamma_0 \odot \gamma \simeq \gamma \odot \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= s, \\ \phi_2(s) &= \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2s - 1 & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(0) = s_0 = \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot \gamma)(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ en $\gamma_0 \odot \gamma$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ en $\gamma \odot \gamma_1$ weghomotoop zijn, gaat net zo. $\square$

Lemma 18.7. Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg, en zij $\gamma^{-1} \in P(X; x_1, x_0)$ de omkering van γ . Schrijf γ_0 (resp. γ_1) voor de constante weg $s \mapsto x_0$ (resp. $s \mapsto x_1$). Dan geldt

$$\gamma \odot \gamma^{-1} \simeq \gamma_0 \quad \text{en} \quad \gamma^{-1} \odot \gamma \simeq \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= 0, \\ \phi_2(s) &= \begin{cases} 2s & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2 - 2s & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(0) \\ &= \gamma_0(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(2 - 2s) = \gamma^{-1}(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma \odot \gamma^{-1})(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ_0 en $\gamma \odot \gamma^{-1}$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ_1 en $\gamma^{-1} \odot \gamma$ weghomotoop zijn, gaat net zo. $\square$

19. De fundamentealgroep

Het blijkt bijzonder nuttig te zijn om wegen van een punt naar zichzelf te bekijken. Dit geeft aanleiding tot een belangrijke “invariant” van een topologische ruimte, de *fundamentealgroep*.

Definitie. Een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ heet *gesloten* als geldt $\gamma(0) = \gamma(1)$. Een gesloten weg γ wordt ook een *lus* genoemd, en het punt $\gamma(0) = \gamma(1)$ heet het *basispunt* van γ .

Notatie. Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. We schrijven $P(X; x_0)$ voor de verzameling van alle lussen met basispunt x_0 , en $\pi_1(X, x_0)$ voor het quotiënt van $P(X; x_0)$ naar de equivalentierelatie $\simeq$.

Stelling 19.1. Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$,

(a) *Er bestaat een unieke afbeelding*

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ (\lambda, \lambda') &\longrightarrow \lambda \cdot \lambda' \end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ geldt

$$[\gamma] \cdot [\gamma'] = [\gamma \odot \gamma'].$$

(b) *De verzameling $\pi_1(X, x_0)$ voorzien van de bewerking $\cdot$ is een groep. Het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is de klasse van de constante weg $\gamma_0: s \mapsto x_0$, en de inverse van $[\gamma]$ is $[\gamma^{-1}]$.*

Bewijs. Voor (a) moeten we bewijzen dat de homotopieklasse van $\gamma \odot \gamma'$ niet verandert als we γ en γ' vervangen door homotopie wegen. Dit volgt echter uit lemma 18.3.

De eigenschappen in (b) volgen uit de lemma's 18.5, 18.6 en 18.7. $\square$

Definitie. De *fundamentealgroep* van X met betrekking tot het basispunt x_0 is $\pi_1(X, x_0)$.

Voorbeeld. Zij $X = \{p\}$ een eenpuntruimte. Dan zijn alle wegen in X gelijk, dus $P(X; p)$ en $\pi_1(X, p)$ hebben beide slechts één element. Met andere woorden: X heeft triviale fundamentealgroep.

Propositie 19.2. Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan zijn de groepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ isomorf.

Bewijs. Opgave. □

Definitie. Een topologische ruimte X heet *enkelvoudig samenhangend* als X samenhangend is en de groep $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is (voor een willekeurig gekozen $x_0 \in X$; de keuze maakt niet uit wegens de vorige propositie).

20. Overdekkingsruimten en het liften van wegen

Tot nu toe is er geen topologische ruimte waarvan we kunnen bewijzen dat hij een niet-triviale fundamentealgroep heeft. We zullen zien dat de fundamentealgroep van de eenheidscirkel S^1 isomorf is met de oneindige cyclische groep $\mathbf{Z}$. Hiervoor hebben we een aantal nieuwe noties nodig.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *overdekkingsruimte* van X is een paar (Y, p) met Y een topologische ruimte en $p: Y \rightarrow X$ een surjectieve continue afbeelding met de volgende eigenschap: X heeft een open overdekking $\mathcal{U}$ zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{U}$ de deelruimte $p^{-1}U \subseteq Y$ een disjuncte vereniging is van open verzamelingen $V \subseteq Y$ waarvoor de afbeelding $p|_V: V \rightarrow U$ een homeomorfisme is. De open deelverzamelingen $V \subseteq Y$ heten *bladen* van Y over U . De afbeelding p heet een *overdekkingsafbeelding*.

Opmerking. De voorwaarde op $p^{-1}U$ kan ook als volgt geformuleerd worden: $p^{-1}U$ is homeomorf met een product $S \times U$, waarbij S een niet-lege discrete topologische ruimte is, zodanig dat de afbeelding $p^{-1}U \rightarrow U$ correspondeert met de projectie $S \times U \rightarrow U$ op de tweede coördinaat.

Voorbeeld. We nemen $X = S^1$ en bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

We beweren dat p een overdekkingsafbeelding is. We bekijken de open deelverzameling $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$. Er geldt

$$\begin{aligned} p^{-1}U &= \{t \in \mathbf{R} \mid \cos(2\pi t) > 0\} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbf{Z}} \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Dan is p voor elke $n \in \mathbf{Z}$ een homeomorfisme $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \xrightarrow{\sim} U$.

Lemma 20.1. Zij X een topologische ruimte, zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X . Dan bestaan er $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ met

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

en open verzamelingen $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ zodanig dat voor alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ geldt $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$.

Bewijs. We merken op dat $\{\gamma^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ een open overdekking van $[0, 1]$ is. Door deze overdekking te verfijnen, krijgen we een open overdekking $\mathcal{V}$ van $[0, 1]$ met intervallen die

open zijn in $[0, 1]$ en zodanig dat voor elke $V \in \mathcal{V}$ geldt $\gamma(V) \subseteq U$ voor een $U \in \mathcal{U}$. Aangezien $[0, 1]$ compact is, mogen we aannemen dat $\mathcal{V}$ eindig is.

Zij $t_0 = 0$, en zij $V_1 \in \mathcal{V}$ zodanig dat $t_0 \in V_1$. Als $1 \in V_1$, nemen we $t_1 = 1$ en zijn we klaar. Neem dus aan dat $1 \notin V_1$. Zij $b_1 = \sup V_1 \in (t_0, 1)$; dan geldt $b_1 \in V_1$ en is $\mathcal{V} \setminus \{V_1\}$ een open overdekking van $[b_1, 1]$ met open deelverzamelingen van $[0, 1]$. Omdat $[0, 1]$ samenhangend is, is $V_1 \cap \bigcup_{V \in \mathcal{V} \setminus \{V_1\}} V$ niet leeg en bevat dus een element $t_1 \in (t_0, b_1)$. We kiezen een $U_1 \in \mathcal{U}$ met $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq \gamma(V_1) \subseteq U_1$. We passen het voorgaande argument toe op het interval $[t_1, 1]$ en de open overdekking $\mathcal{V} \setminus \{V_1\}$. Door dit te herhalen (eindig vaak omdat $\mathcal{V}$ eindig is), krijgen we de gevraagde $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ en $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. $\square$

Propositie 20.2. *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$ een punt, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg met $\gamma(0) = x_0$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y_0 \in Y$ zodanig dat $p(y_0) = x_0$. Dan is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_{y_0}: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\gamma}_{y_0} = \gamma$ en $\tilde{\gamma}_{y_0}(0) = y_0$.*

De weg $\tilde{\gamma}_{y_0}$ als boven heet de *lift* van γ naar de overdekkingsruimte Y met beginpunt y_0 .

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X als in de definitie van overdekkingsruimten. We kiezen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ en $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ als in het bovenstaande lemma. Voor alle $1 \leq j \leq n$ schrijven we

$$x_j = \gamma(t_j) \in U_{j-1} \cap U_j$$

en schrijven we $\pi^{-1}U_j$ als een vereniging van bladen

$$\pi^{-1}U_j = \bigsqcup_{k \in I_j} V_{j,k}$$

zodanig dat $\pi|_{V_{j,k}}: V_{j,k} \rightarrow U_j$ een homeomorfisme is.

Zij V_1 het blad van $\pi^{-1}U_1$ dat y_0 bevat. Per aanname is de afbeelding

$$p|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_1$$

een homeomorfisme. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1: [t_0, t_1] &\longrightarrow V_1 \\ t &\longmapsto (p|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dan is $\tilde{\gamma}_1: [t_0, t_1] \rightarrow Y$ een weg van y_0 naar een tweede punt $y_1 = \tilde{\gamma}_1(t_1) \in V_1 \subseteq Y$.

Zij V_2 het blad van $\pi^{-1}U_2$ dat y_1 bevat. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2: [t_1, t_2] &\longrightarrow V_2 \\ t &\longmapsto (p|_{V_2})^{-1}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

en $y_2 = \tilde{\gamma}_2(t_2)$. Zo verdergaande vinden we achtereenvolgens punten $y_j \in V_j$ met $p(y_j) = x_j$ en wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j: [t_{j-1}, t_j] &\longrightarrow V_j \\ t &\longmapsto (p|_{V_j})^{-1}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

van y_{j-1} naar y_j . Wegens $\tilde{\gamma}_j(t_j) = y_j = \gamma_{j+1}(t_j)$, bestaat er een unieke afbeelding $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $\tilde{\gamma}|_{[t_{j-1}, t_j]} = \tilde{\gamma}_j$.

Door te gebruiken dat het beeld van $\tilde{\gamma}_j$ bevat moet zijn in V_j , zien we in dat $\tilde{\gamma}$ de unieke lift van γ met beginpunt y_0 is. $\square$

Voorbeeld. Zij $X = S^1$, en zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor elke $n \in \mathbf{Z}$ definiëren we een lus $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ door

$$\begin{aligned}\gamma^n: [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)).\end{aligned}$$

We bekijken opnieuw de afbeelding

$$\begin{aligned}p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).\end{aligned}$$

Er geldt

$$p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}.$$

Voor alle $m \in p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ is de weg $(\widetilde{\gamma^n})_m: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven door

$$(\widetilde{\gamma^n})_m(s) = m + ns.$$

Propositie 20.3. Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ een continue afbeelding met $\Gamma(0, 0) = x_0$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y_0 \in Y$ zodanig dat $p(y_0) = x_0$.

- (a) Er bestaat een unieke continue afbeelding $\tilde{\Gamma}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$ en $\tilde{\Gamma}(0, 0) = y_0$.
- (b) Als Γ een weghomotopie is, dan is $\tilde{\Gamma}$ ook een weghomotopie.

Bewijs. (a) Dit gaat op een soortgelijke manier als het bewijs van propositie 20.2. We geven hier een constructie die niet direct laat zien dat $\tilde{\Gamma}$ continu is; zie het boek (Runde, Lemma 5.2.4) voor een volledig bewijs.

We definiëren eerst

$$\begin{aligned}\Gamma_0: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \Gamma(t, 0).\end{aligned}$$

Wegens propositie 20.2 is er een unieke weg $\tilde{\Gamma}_0: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0$ en $\tilde{\Gamma}_0(0) = y_0$. Voor elke $t \in [0, 1]$ bekijken we nu de weg

$$\begin{aligned}\gamma_t: [0, 1] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \Gamma(t, s).\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\gamma_t(0) &= \Gamma(t, 0) \\ &= \Gamma_0(t) \\ &= p(\tilde{\Gamma}_0(t)).\end{aligned}$$

Wegens propositie 20.2 is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_t: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\gamma}_t = \gamma_t$ en $\tilde{\gamma}_t(0) = \tilde{\Gamma}_0(t)$. We definiëren

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (t, s) &\longmapsto \tilde{\gamma}_t(s).\end{aligned}$$

Zoals gezegd, bewijzen we hier niet dat $\tilde{\Gamma}$ continu is.

(b) Stel dat Γ een weghomotopie is. Dit betekent dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt $\Gamma(t, 0) = x_0$. Hieruit volgt dat de afbeelding $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t, 0)$ een lift van de constante weg $t \mapsto x_0$ is met beginpunt y_0 . Ook de afbeelding $t \mapsto y_0$ is zo'n lift. Wegens uniciteit van lifts impliceert dit $\tilde{\Gamma}(t, 0) = y_0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Op dezelfde manier zien we dat $t \mapsto \Gamma(t, 1)$ een constante weg is. Hieruit volgt dat $\tilde{\Gamma}$ een weghomotopie is. $\square$

Gevolg 20.4. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen die weghomotoop zijn. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zijn $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}': [0, 1] \rightarrow Y$ lifts van γ respectievelijk γ' . Als $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{\gamma}'$ hetzelfde beginpunt hebben, dan hebben ze ook hetzelfde eindpunt.

21. Een groepswerking van de fundamentealgroep

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van groepen is het begrip groepswerking, bekend uit Algebra 1. In deze paragraaf illustreren we dit aan de hand van het voorbeeld van de cirkel S^1 , waarvan we de fundamentealgroep zullen berekenen via een geschikte groepswerking.

Stelling 21.1. Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $Y_0 = p^{-1}\{x_0\}$.

(a) Er bestaat een unieke afbeelding van verzamelingen

$$\begin{aligned} Y_0 \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow Y_0 \\ (y_0, \lambda) &\longmapsto y_0 \star \lambda \end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ en alle $y_0 \in Y_0$ geldt

$$y_0 \star [\gamma] = \tilde{\gamma}_{y_0}(1).$$

(b) De in (a) gedefinieerde afbeelding is een rechtswerking van de groep $\pi_1(X, x_0)$ op de verzameling Y_0 .

(c) Als Y wegsamenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0 .

(d) Als Y enkelvoudig samenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ vrij op Y_0 .

Bewijs. (a) Als $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ hetzelfde element van $\pi_1(X, x_0)$ representeren, dan zijn γ en γ' wegens gevolg 20.4 weghomotoop; in het bijzonder geldt $\tilde{\gamma}_{y_0}(1) = \tilde{\gamma}'_{y_0}(1)$. Dit laat zien dat de afbeelding $\star$ goed gedefinieerd is.

(b) We moeten twee uitspraken bewijzen: (1) als γ_0 de constante weg $s \mapsto x_0$ is, dan geldt voor alle $y_0 \in Y_0$ de identiteit

$$y_0 \star [\gamma_0] = y_0,$$

en (2) voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ en $y_0 \in Y_0$ geldt de identiteit

$$(y_0 \star [\gamma]) \star [\gamma'] = y_0 \star ([\gamma] \cdot [\gamma']).$$

De eerste uitspraak volgt uit het feit dat de lift van γ_0 met beginpunt y_0 de constante weg $s \mapsto y_0$ is. We moeten nog de tweede uitspraak bewijzen. Zij $\tilde{\gamma}_{y_0}$ de lift van γ met beginpunt y_0 , en zij $y_1 = \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$. Zij $\tilde{\gamma}'_{y_1}$ de lift van γ' met beginpunt y_1 , en zij $y_2 = \tilde{\gamma}'_{y_1}(1)$. Dan geldt per definitie

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \star [\gamma], \\ y_2 &= y_1 \star [\gamma'] \\ &= (y_0 \star [\gamma]) \star [\gamma']. \end{aligned}$$

Anderzijds is het eindpunt van $\tilde{\gamma}_{y_0}$ gelijk aan het beginpunt van $\tilde{\gamma}'_{y_1}$, namelijk y_1 , en is de aaneenschakeling $\tilde{\gamma}_{y_0} \odot \tilde{\gamma}'_{y_1}$ de unieke lift van $\gamma \odot \gamma'$ met beginpunt y_0 . Hieruit volgt

$$\begin{aligned} y_2 &= (\tilde{\gamma}_{y_0} \odot \tilde{\gamma}'_{y_1})(1) \\ &= (\widetilde{\gamma \odot \gamma'})_{y_0}(1) \\ &= y_0 \star [\gamma \odot \gamma'] \\ &= y_0 \star ([\gamma] \cdot [\gamma']), \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

(c) Gegeven twee punten $y_0, y'_0 \in Y_0$ bestaat er een weg $\tilde{\gamma}$ van y_0 naar y'_0 in Y . Nu is de weg $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ per definitie een lus waarvan de lift $\tilde{\gamma}_{y_0}$ met beginpunt y_0 gelijk is aan $\tilde{\gamma}$. Er geldt dus $y_0 \star [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = y'_0$. Dit laat zien dat $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0 werkt.

(d) Zij $y_0 \in Y_0$. We moeten laten zien dat de stabilisator van y_0 in $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is. Zij $[\gamma]$ een element van deze stabilisator. Dan heeft de lift $\tilde{\gamma}_{y_0}$ van γ met beginpunt y_0 ook eindpunt y_0 , dus $\tilde{\gamma}_{y_0}$ is een lus in y_0 . Omdat Y enkelvoudig samenhangend is, is $\tilde{\gamma}_{y_0}$ homotoop met de constante weg $s \mapsto y_0$. Hieruit volgt dat γ homotoop is met de constante weg $s \mapsto x_0$, dus dat $[\gamma]$ het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is. $\square$

Voorbeeld. Neem weer $X = S^1$ en $x_0 = (1, 0)$, en zij $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ de eerder gedefinieerde overdekking. Voor alle $m \in Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ geldt

$$m \star [\gamma^n] = m + n.$$

22. De fundamentealgroep van de cirkel

Stelling 22.1. Zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ schrijven we $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ voor de lus gegeven door

$$\begin{aligned} \gamma^n: [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)). \end{aligned}$$

(a) De fundamentealgroep $\pi_1(S^1, x_0)$ is een oneindige cyclische groep voortgebracht door de weghomotopieklasse $[\gamma^1]$, d.w.z. het groepshomomorfisme

$$\begin{aligned} \omega: \mathbf{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, x_0) \\ n &\longmapsto [\gamma^1]^n \end{aligned}$$

is een isomorfisme.

(b) Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ is het element $[\gamma^1]^n \in \pi_1(S^1, x_0)$ gelijk aan de klasse $[\gamma^n]$ van de weg $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$.

Bewijs. Zij $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ de eerder gedefinieerde overdekking. Omdat $\mathbf{R}$ wegsamenhangend en enkelvoudig samenhangend is, werkt de groep $\pi_1(S^1, x_0)$ vrij en transitief op de verzameling $Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ wegens stelling 21.1. Dit betekent dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \sigma: \pi_1(S^1; x_0) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto 0 \star [\gamma] \end{aligned}$$

een bijectie is. We merken op dat $[\gamma^1] \in \pi_1(S^1, x_0)$ op $Y_0 = \mathbf{Z}$ werkt als translatie over 1, d.w.z. er geldt $m \star [\gamma^1] = m + 1$ en hiermee $m \star [\gamma^1]^n = m + n$ voor alle $m, n \in \mathbf{Z}$. Dit impliceert dat voor alle $n \in \mathbf{Z}$ geldt

$$\sigma(\omega(n)) = 0 \star [\gamma^1]^n = n.$$

Dus ω is de inverse van σ en hiermee ook een bijectie. We berekenen

$$\begin{aligned} \sigma([\gamma^n]) &= 0 \star [\gamma^n] \\ &= n \\ &= \sigma([\gamma^1]^n); \end{aligned}$$

wegens de injectiviteit van σ volgt $[\gamma^n] = [\gamma^1]^n$. $\square$

23. Homotopie-equivalentie

Definitie. Zijn X en Y topologische ruimten. Een *homotopie-equivalentie* van X naar Y is een continue afbeelding

$$f: X \rightarrow Y$$

zodanig dat er een continue afbeelding $g: Y \rightarrow X$ bestaat waarvoor $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) homotoop is met de identiteit op X (resp. op Y).

Als $f: X \rightarrow Y$ een homotopie-equivalentie is, dan is een afbeelding $g: Y \rightarrow X$ als in de bovenstaande definitie duidelijk ook een homotopie-equivalentie. Verder is de samenstelling van twee homotopie-equivalenties ook een homotopie-equivalentie.

Definitie. Twee topologische ruimten X en Y worden *homotopie-equivalent* genoemd als er een homotopie-equivalentie van X naar Y bestaat.

Voorbeeld. (1) Zij $f: X \rightarrow Y$ een homeomorfisme. Dan is f een homotopie-equivalentie.

(2) Zij $X = \mathbf{R}^n$, en zij $Y = \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^n &\rightarrow \{0\} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g: \{0\} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}.$$

Dan is $g \circ f$ homotoop met de identiteit op $\mathbf{R}^n$ (zie een eerder voorbeeld), en $f \circ g$ is de identiteit op $\{0\}$. Hieruit volgt dat $\mathbf{R}^n$ en $\{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

(3) Zij $X = S^1$, en zij $Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow S^1 \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y). \end{aligned}$$

Dan is $g \circ f$ gelijk aan de identiteit op S^1 , en $f \circ g$ is homotoop met de identiteit op $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ via de homotopie

$$\begin{aligned} F: [0, 1] \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) &\rightarrow (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) \\ (t, (x, y)) &\mapsto \frac{1}{t + (1-t)\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat S^1 en $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

Definitie. Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat de constante afbeelding $f_0: X \rightarrow X$ met beeld x_0 homotoop is met de identiteit op X .

Lemma 23.1. Een topologische ruimte X is samentrekbaar dan en slechts dan als X homotopie-equivalent is met de eenpuntruimte $\{0\}$.

Propositie 23.2. Zij X een topologische ruimte. Als X samentrekbaar is, dan is X enkelvoudig samenhangend.

Bewijs. Per aanname is X homotopie-equivalent met de eenpuntruimte. Hieruit volgt dat de fundamentealgroep van X isomorf is met de fundamentealgroep van de eenpuntruimte; deze is triviaal, dus hetzelfde geldt voor de fundamentealgroep van X . $\square$

Opmerking. De omkering geldt niet: de eenheidsbol S^2 is wel enkelvoudig samenhangend, maar niet samentrekbaar.

24. De fundamentealgroep (vervolg)

We gaan nu bekijken hoe de fundamentealgroep zich gedraagt onder continue afbeeldingen. Het hoofdresultaat is dat de fundamentealgroep een “invariant is op homotopie-equivalentieklassen van topologische ruimten”.

Stelling 24.1. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding, zij $x_0 \in X$, en zij $y_0 = f(x_0)$.

(a) Er is een unieke continue afbeelding

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

met de eigenschap dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ geldt

$$f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

(b) De afbeelding f_* is een groepshomomorfisme.

(c) Zij $g: Y \rightarrow Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z_0 = g(y_0)$. Dan geldt

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

(als afbeeldingen van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Z, z_0)$).

Bewijs. Opgave. $\square$

We bekijken nu hoe de zojuist ingevoerde geïnduceerde afbeeldingen op fundamentealgroepen zich verhouden tot homotopieën.

Propositie 24.2. Zijn X en Y topologische ruimten, en zij $x_0 \in X$. Zijn $f, g: X \rightarrow Y$ twee continue afbeeldingen, en zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g . Zij α de weg in Y gedefinieerd door $\alpha(t) = F(t, x_0)$. Dan voldoet het isomorfisme

$$\phi_\alpha: \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, g(x_0))$$

geïnduceerd door α (zie opgave 9 van blad 10 of Runde, Proposition 5.1.23) aan de vergelijking

$$\phi_\alpha \circ f_* = g_*.$$

Bewijs. Zij $\gamma \in P(X; x_0)$ een lus. We schrijven

$$\gamma_t(s) = F(t, \gamma(s)).$$

In het bijzonder geldt

$$\begin{aligned}\gamma_0(s) &= f(\gamma(s)), \\ \gamma_1(s) &= g(\gamma(s)).\end{aligned}$$

We moeten bewijzen dat de wegen

$$f_0 \odot \alpha \quad \text{en} \quad \alpha \odot f_1$$

van $f(x_0)$ naar $g(x_0)$ weghomotoop zijn. We definiëren een afbeelding

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

$$(t, s) \longmapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq t/2, \\ \gamma_t(2s - t) & \text{als } t/2 \leq s \leq (t+1)/2, \\ \alpha(2s - 1) & \text{als } (t+1)/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat H continu is. Voor alle $s \in [0, 1]$ geldt

$$H(0, s) = \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

en

$$H(1, s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_1(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dus H is een homotopie van $\gamma_0 \odot \alpha$ naar $\alpha \odot \gamma_1$. Tot slot merken we op dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$H(t, 0) = \alpha(0) = f(x_0) \quad \text{en} \quad H(t, 1) = \alpha(1) = g(x_0)$$

dus H is een weghomotopie. □

Stelling 24.3. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een homotopie-equivalentie. Zij $x_0 \in X$ en zij $y_0 = f(x_0)$. Dan is $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ een isomorfisme.*

Bewijs. Zij $g: Y \rightarrow X$ een continue afbeelding zodanig dat $g \circ f \sim \text{id}_X$ en $f \circ g \sim \text{id}_Y$. We schrijven $x_1 = g(y_0)$ en $y_1 = f(x_1)$. Zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van id_X naar $g \circ f$, en zij $G: [0, 1] \times Y \rightarrow X$ een homotopie van id_Y naar $f \circ g$. We schrijven verder $\alpha(t) = F(t, x_0)$ en $\beta(t) = G(t, y_0)$. Dan is er een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow[\text{id}]{=} & \pi_1(Y, y_0) \\ \text{id} \downarrow = & \searrow & \downarrow g_* & \searrow & \sim \downarrow \phi_\beta \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\phi_\alpha]{\sim} & \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1). \end{array}$$

De diagonale afbeelding in het linker vierkant is een isomorfisme, dus g_* is surjectief. Ook de diagonale afbeelding in het rechter vierkant is een isomorfisme, dus g_* is injectief. Hieruit volgt dat g_* een isomorfisme is, dus ook f_* is een isomorfisme. □

Ook de volgende variant is vaak nuttig.

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij Y een deelruimte van X . Een *retractie* van X op Y is een continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat $f|_Y$ de identiteit op Y is.

Propositie 24.4. *Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X , en zij $x_0 \in Y \subseteq X$. Als er een retractie van X op Y bestaat, dan is de afbeelding $\pi_1(Y, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injectief.*

Bewijs. Zij $i: Y \rightarrow X$ de inclusieafbeelding, en zij $f: X \rightarrow Y$ een retractie van X op Y . Per definitie geldt $f \circ i = \text{id}_Y$. Dit impliceert dat $f_* \circ i_* = (f \circ i)_*$ de identiteit op $\pi_1(Y, x_0)$ is. In het bijzonder is i_* injectief en f_* surjectief. $\square$

Een belangrijke toepassing van propositie 27.4 heeft betrekking op continue afbeeldingen $D^2 \rightarrow D^2$, waarbij

$$\begin{aligned} D^2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

de gesloten eenheidsschijf is.

Stelling 24.5 (Dekpuntsstelling van Brouwer). *Zij $f: D^2 \rightarrow D^2$ een continue afbeelding. Dan bestaat er een $z \in D^2$ zodanig dat $f(z) = z$.*

Bewijs. Stel dat f geen dekpunt heeft. We definiëren een afbeelding $g: D^2 \rightarrow S^1$ als volgt: voor $z \in D^2$ is $g(z)$ het snijpunt van de lijn door z en $f(z)$ met S^1 zodanig dat z tussen $f(z)$ en $g(z)$ op deze lijn ligt. Het is eenvoudig na te gaan (bijvoorbeeld door een formule voor $g(z)$ op te schrijven) dat g continu is. Verder geldt duidelijk $g(z) = z$ voor alle $z \in S^1$, dus g is een retractie. Uit propositie 24.4 volgt dat g een injectie

$$g_*: \pi_1(S^1, (1, 0)) \longrightarrow \pi_1(D^2, (1, 0))$$

induceert. De fundamentealgroep van S^1 is echter isomorf met $\mathbf{Z}$, terwijl de fundamentealgroep van D^2 triviaal is, een tegenspraak. We concluderen dat f een dekpunt heeft. $\square$