UITWERKING HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Donderdag 2 juli 2015, 10:00–13:00

(16 pt) **1.** (a) De deelruimten W en Y zijn gesloten; alleen Y is compact.

(b) De samenhangscomponenten van W zijn de drie deelruimten gedefinieerd door $x \leq -2$, $|x| \leq 1$ respectievelijk $x \geq 2$. De samenhangscomponenten van X zijn de twee deelruimten gedefinieerd door $x > 0$ respectievelijk $x < 0$. De samenhangscomonpenten van Y zijn de twee deelruimten gedefinieerd door $x = y = 0$ respectievelijk $\max\{|x|, |y|\} = 1$. De samenhangscomponenten van Z zijn de (aftelbaar veel) deelruimten $\mathbf{R} \times \{a\} = \{(x, a) : x \in \mathbf{R}\}$ voor $a \in \mathbf{Q}$.

(14 pt) **2.** (a) Stel X is rijcompact en Y is gesloten in X. Zij $(y_n)_{n\geq 0}$ een rij in Y. Dan heeft $(y_n)_{n\geq 0}$ een deelrij $(x_m)_{m\geq 0}$ die in X convergeert. Omdat Y gesloten is en $(x_m)_{m\geq 0}$ een rij in Y is die in X convergeert, ligt de limiet van $(x_m)_{m\geq 0}$ in Y, dus $(x_m)_{m\geq 0}$ is een convergente deelrij van $(y_n)_{n\geq 0}$ in Y. Hieruit volgt dat Y rijcompact is.

(b) Stel dat X totaal begrensd is. Zij $\epsilon > 0$. Omdat X totaal begrensd is, bestaat er een overdekking van X van de vorm $\{B_{\epsilon/2}(x_1), \ldots, B_{\epsilon/2}(x_n)\}$. Voor alle i met $1 \leq i \leq n$ is de doorsnede $B_{\epsilon/2}(x_i) \cap Y$ ofwel leeg, ofwel niet-leeg; we mogen aannemen dat deze doorsnede niet-leeg is precies wanneer $1 \leq i \leq m$, met $m \geq n$. Voor $1 \leq i \leq m$ kiezen we $y_i \in B_{\epsilon/2}(x_i) \cap Y$. Zij nu $y \in Y$. Voor een i met $1 \leq i \leq n$ geldt $y \in B_{\epsilon/2}(x_i)$; wegens onze aanname geldt $i \leq m$. De driehoeksongelijkheid geeft $d(y, y_i) \leq d(y, x_i) + d(x_i, y_i) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, dus $y \in B_\epsilon(y_i)$. Hieruit volgt dat $\{B_\epsilon(y_1), \ldots, B_\epsilon(y_m)\}$ een open overdekking van Y is. Aangezien deze constructie voor elke $\epsilon > 0$ werkt, is Y totaal begrensd.

(14 pt) **3.** (a) Zijn X en Y twee Hausdorffruimten. Zijn (x, y) en (x', y') twee verschillende punten van $X \times Y$. Dan geldt $x \neq x'$ of $y \neq y'$. We bekijken het geval $x \neq x'$. Omdat X een Hausdorffruimte is, bestaan er disjuncte open omgevingen U en U' van x respectievelijk x' in X. Nu zijn $U \times Y$ en $U' \times Y$ disjuncte open omgevingen van (x, y) respectievelijk (x', y') in $X \times Y$. Het geval $y \neq y'$ gaat net zo. We concluderen dat $X \times Y$ een Hausdorffruimte is.

(b) Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, met X een Hausdorffruimte. Zijn $y, y' \in Y$ twee verschillende punten. We schrijven $x = p(y)$ en $x' = p(y')$. We bekijken eerst het geval $x = x'$. Omdat p een overdekkingsafbeelding is, bestaat er een open omgeving U van x in X zodanig dat $p^{-1}U$ een disjuncte vereniging van open deelverzamelingen V_i van Y met de eigenschap dat $p|_{V_i}\colon V_i \to U_i$ een homeomorfisme is. Aangezien $p(y) = p(y')$ terwijl $y \neq y'$, liggen y en y' in verschillende verzamelingen U_i. We bekijken vervolgens het geval $x \neq x'$. Omdat X een Hausdorffruimte is, bestaan er disjuncte open omgevingen V en V' van x respectievelijk x'. Dan zijn $p^{-1}V$ en $p^{-1}V'$ disjuncte open omgevingen van y respectievelijk y'. We concluderen dat Y een Hausdorffruimte is.

(14 pt) **4.** (a) De uitspraak dat Y nergens dicht is in X is equivalent met $(\bar{Y})^\circ = \emptyset$; door het nemen van complementen zien we dat dit equivalent is met $X \setminus (\bar{Y})^\circ = X$. Wegens $X \setminus (\bar{Y})^\circ = \overline{X \setminus \bar{Y}}$ is dit equivalent met de uitspraak dat $X \setminus \bar{Y}$ dicht is in X.

(b) Stel dat $Y_1, Y_2 \subseteq X$ nergens dicht zijn. Er geldt $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2$, en dus $X \setminus \overline{Y_1 \cup Y_2} = X \setminus (\bar{Y}_1 \cup \bar{Y}_2) = (X \setminus \bar{Y}_1) \cap (X \setminus \bar{Y}_2)$. Aangezien $X \setminus \bar{Y}_1$ en $X \setminus \bar{Y}_2$

dicht zijn in X zoals bewezen in (a), is ook $X \setminus \overline{Y_1 \cup Y_2}$ dicht is in X wegens de hint in de opgave. Door opnieuw (a) te gebruiken, concluderen we dat $Y_1 \cup Y_2$ nergens dicht is.

(16 pt) **5.** (a) We schrijven p en q voor de projecties $X \times Y \to X$ en $X \times Y \to Y$. De afbeeldingen $X \times Y \to X$ en $X \times Y \to Y$ gedefinieerd door (x, y) op respectievelijk $p(h(x, y)) = f(x)$ en $q(h(x, y)) = g(y)$ af te beelden zijn continu omdat de afbeeldingen f, g, p en q continu zijn. Aangezien $p \circ h$ en $q \circ h$ continu zijn, is h continu. Net zo is in te zien dat h' continu is.

Zij $F\colon [0, 1] \times X \to X$ een homotopie van f naar f', en zij $G\colon [0, 1] \times Y \to Y$ een homotopie van g naar g'. We definiëren $H\colon [0, 1] \times X \times Y \longrightarrow X \times Y$ door $H(t, x, y) = (F(t, x), G(t, y))$. Dan is H continu omdat $p \circ H$ en $q \circ H$ continu zijn. Bovendien voldoet h aan $H(0, x, y) = (F(0, x), G(0, y)) = (f(x), g(y)) = h(x, y)$ en net zo $H(1, x, y) = h'(x, y)$. Dit laat zien dat h en h' homotoop zijn.

(b) Wegens de definitie van homotopie-equivalentie bestaan er afbeeldingen $f\colon X_1 \to X_2$, $f'\colon X_2 \to X_1$, $g\colon Y_1 \to Y_2$ en $g'\colon Y_2 \to Y_1$ zodanig dat geldt $f' \circ f \sim \mathrm{id}_{X_1}$, $f \circ f' \sim \mathrm{id}_{X_2}$, $g' \circ g \sim \mathrm{id}_{Y_1}$ en $g \circ g' \sim \mathrm{id}_{Y_2}$ (met $\sim$ de homotopierelatie). We definiëren continue afbeeldingen $h\colon X_1 \times Y_1 \to X_1 \times Y_1$ en $h\colon X_2 \times Y_2 \to X_2 \times Y_2$ door $h(x, y) = (f'(f(x)), g'(g(y)))$ en $h'(x, y) = (f(f'(x)), g(g'(y)))$. Uit (a) volgt dat h homotoop is met de identiteit op $X_1 \times Y_1$ en h' met de identiteit op $X_2 \times Y_2$. Hieruit volgt dat $X_1 \times Y_1$ homotopie-equivalent is met $X_2 \times Y_2$.

(16 pt) **6.** (a) Voor het bepalen van de fundamentaalgroep van $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \{4, 9\}\}$ met basispunt $(0, 2)$ is alleen de wegsamenhangscomponent van het punt $(0, 2)$ van belang; dit is de cirkel met straal 2. In het college is bewezen dat de fundamentaalgroep van een cirkel isomorf is met $\mathbf{Z}$.

(b) De ruimte $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\} \setminus \{(-1, -1, -1)\}$ (een kubus met een hoekpunt weggelaten) is samentrekbaar; dit is bijvoorbeeld in te zien doordat de kubus homeomorf is met een bol, en in een werkcollegeopgave is bewezen dat de bol met een punt weggelaten samentrekbaar is. Hieruit volgt dat de gevraagde fundamentaalgroep triviaal is.