Topologie, voorjaar 2015

Opgavenblad 10

werkcollege 4 mei

1. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X wegsamenhangend is dan en slechts dan als elk tweetal afbeeldingen van de eenpuntsruimte $\{0\}$ naar X homotoop is.

2. Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte. Laat zien dat elk tweetal wegen $[0,1] \to X$ homotoop is. (*Hint:* elke weg in X is homotoop met een constante weg.)

3. (a) Laat zien dat de twee afbeeldingen $f, g\colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z) = z \quad \text{en} \quad g(z) = z/|z|$$

homotoop zijn.

(b) Idem voor de twee afbeeldingen $f, g\colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{en} \quad g(z) = 1/z.$$

Gegeven twee topologische ruimten X en Y schrijven we $C(X,Y)$ voor de verzameling van alle continue afbeeldingen $X \to Y$. In het college is bewezen dat de homotopierelatie $\sim$ op $C(X,Y)$ een equivalentierelatie is. De verzameling van *homotopieklassen van continue afbeeldingen van X naar Y*, notatie $H(X,Y)$, is gedefinieerd als de quotiëntverzameling

$$H(X,Y) = C(X,Y)/{\sim}.$$

Voor $f \in C(X,Y)$ noteren we de klasse van f in $H(X,Y)$ met $\langle f \rangle$.

4. Zijn X, Y en Z topologische ruimten. Stel dat $f, f' \in C(X,Y)$ en $g, g' \in C(Y,Z)$ afbeeldingen zijn die voldoen aan $f \sim f'$ en $g \sim g'$.

(a) (Runde, 5.1.2.) Bewijs dat de afbeeldingen $g \circ f$ en $g' \circ f'$ in $C(X,Z)$ voldoen aan $g \circ f \sim g' \circ f'$.

(b) Bewijs dat er een unieke afbeelding

$$H(Y,Z) \times H(X,Y) \xrightarrow{*} H(X,Z)$$

van verzamelingen bestaat zodanig dat voor alle $f \in C(X,Y)$ en $g \in C(Y,Z)$ geldt

$$\langle g \rangle * \langle f \rangle = \langle g \circ f \rangle.$$

5. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. We zeggen dat X *convex* is als voor alle $x, y \in X$ het lijnsegment dat x en y verbindt in X bevat is, d.w.z. voor alle $t \in [0,1]$ geldt

$$(1-t)x + ty \in X.$$

We zeggen dat X *stervormig* is als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ en alle $t \in [0,1]$ geldt

$$x_0 + t(x - x_0) \in X.$$

(a) Bewijs dat elke niet-lege convexe deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ stervormig is.

(b) Geef een voorbeeld van een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ die wel stervormig, maar niet convex is.

(c) Laat zien dat elke stervormige deelruimte van $\mathbf{R}^n$ wegsamenhangend is.

6. Zij X een stervormige deelruimte van $\mathbf{R}^n$, en zij $x_0 \in X$ als in de vorige opgave.

(a) Zij Y een topologische ruimte. Laat zien dat elke continue afbeelding $Y \to X$ homotoop is met de constante afbeelding $Y \to X$ met beeld $\{x_0\}$.

(b) Bewijs dat elke lus $\gamma \in P(X; x_0)$ weghomotoop is met de constante lus $t \mapsto x_0$.

(c) Laat zien dat voor elke $x \in X$ de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ triviaal is.

7. Zij S^1 de eenheidscirkel $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Beschrijf een surjectieve afbeelding $\gamma\colon [0, 1] \to S^1$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ die (gezien als weg in S^1) weghomotoop is met de constante weg $[0, 1] \to S^1$ met beeld $\{(1, 0)\}$.

8. (vgl. Runde, 5.1.6.) Zij X een topologische ruimte, zij Y een wegsamenhangscomponent van X, en zij $x_0 \in Y$. Laat zien dat de inclusie $Y \hookrightarrow X$ een isomorfisme

$$\pi_1(Y, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$$

van fundamentaalgroepen induceert.

9. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zij $\alpha \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. Bewijs dat er tussen de fundamentaalgroepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ een groepsisomorfisme

$$\phi_\alpha\colon \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$$

bestaat dat voor elke weg $\gamma \in P(X; x_0)$ de klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ afbeeldt op de klasse $[\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha] \in \pi_1(X, x_1)$.