Topologie, voorjaar 2015

Opgaven werkcollege 8

30 maart 2015

1. (Runde, 2.5.9.) Zij (K, d) een compacte metrische ruimte, en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van K. Bewijs dat er een reëel getal $L > 0$ bestaat zodanig dat er voor elke niet-lege deelverzameling $S \subseteq K$ met $\mathrm{diam}(S) < L$ een $U \in \mathcal{U}$ bestaat met $S \subseteq U$.

2. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ met de producttopologie. Gebruik de stelling van Tichonov om te bewijzen dat Y niet discreet is (vgl. opgave 10 van blad 7).

3. Zij (X, d) een metrische ruimte.

(a) Stel dat X lokaal compact en volledig is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Stel dat X lokaal compact en totaal begrensd is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

4. Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat X en Y homeomorf zijn dan en slechts dan als X en Y dezelfde kardinaliteit hebben (als verzamelingen).

5. Construeer een homeomorfisme van het eenheidsvierkant

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1/2\}$$

naar de eenheidscirkel

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

6. Laat zien dat het open eenheidsinterval $(0, 1)$ en het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ niet homeomorf zijn. (*Hint:* vind een topologische eigenschap die $[0, 1]$ wel heeft maar $(0, 1)$ niet.)

7. In deze opgave bewijzen we dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn. Zij $P \in \mathbf{R}$ en $Q \in \mathbf{R}^2$.

(a) Laat zien dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ niet samenhangend is.

(b) Laat zien dat $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ wel samenhangend is.

(c) Concludeer dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ en $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ niet homeomorf zijn.

(d) Leid uit (c) af dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn.

Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van $(X, \mathcal{T})$ is een compacte Hausdorffruimte $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ samen met een continue afbeelding $\iota\colon X \to X_\infty$ zodanig dat $\iota\colon X \to \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_\infty \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

8. Zijn $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ en $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ twee eenpuntscompactificaties van $(X, \mathcal{T})$ met bijbehorende continue afbeeldingen $\iota\colon X \to X_\infty$ en $\iota'\colon X \to X'_\infty$.

(a) Bewijs dat er een unieke bijectie $f\colon X_\infty \to X'_\infty$ bestaat waarvoor geldt $f \circ \iota = \iota'$.

(b) Bewijs dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ en $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ homeomorf zijn.

9. Zij $\mathbf{R}_\infty$ een eenpuntscompactificatie van $\mathbf{R}$. Laat zien dat $\mathbf{R}_\infty$ homeomorf is met de eenheidscirkel.

10. Zij X een *compacte* Hausdorffruimte. Beschrijf de eenpuntscompactificatie van X.