HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Donderdag 30 juni 2016, 10:00–13:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

In alle opgaven zijn $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}$ voorzien van de euclidische metriek en topologie.

Het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten de som van de punten voor alle opgaven is.

(12 pt) **1.** Bepaal (zonder bewijs) van elk van de volgende deelruimten van $\mathbf{R}^2$ het inwendige, de afsluiting en de rand:

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1\}, \quad Y = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, \quad Z = \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}.$$

(12 pt) **2.** Zij X een metrische ruimte die (gezien als topologische ruimte) samenhangend is. Zij V een metrische deelruimte van X zodanig dat zowel V als het complement $X \setminus V$ volledig is. Bewijs dat V ofwel leeg is, ofwel gelijk is aan X.

(10 pt) **3.** Zij X een discrete topologische ruimte. Laat zien dat X compact is dan en slechts dan als X eindig is.

(12 pt) **4.** Geef voor de volgende uitspraak een bewijs of een tegenvoorbeeld: als X een topologische ruimte is waarvan elke samenhangscomponent uit één punt bestaat, dan is X discreet.

(12 pt) **5.** Zij X een compacte topologische ruimte, zij Y een Hausdorffruimte en zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Bewijs dat voor elke compacte deelruimte K van Y de deelruimte $f^{-1}K$ van X eveneens compact is.

(16 pt) **6.** Zij $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ de eenheidscirkel.

(a) Zij $f\colon S^1 \to S^1$ de continue afbeelding $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Geef een homotopie tussen f en de identiteit op S^1.

(b) Geef een voorbeeld van een surjectieve continue afbeelding $S^1 \to S^1$ die homotoop is met de constante afbeelding $(x, y) \mapsto (1, 0)$; geef ook een homotopie tussen deze twee afbeeldingen.

(16 pt) **7.** (a) Laat zien dat de continue afbeelding $\mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ gedefinieerd door $z \mapsto z^2$ een overdekkingsafbeelding is.

(b) Laat zien dat de continue afbeelding $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ gedefinieerd door $z \mapsto z^2$ *geen* overdekkingsafbeelding is.

Succes!