Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 4

23 februari 2016

Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *completering* van (X, d) (zoals gedefinieerd in het college) is een volledige metrische ruimte $(\tilde{X}, \tilde{d})$ samen met een isometrie $\iota\colon X \to \tilde{X}$ zodanig dat de volgende "universele eigenschap" geldt: voor elke volledige metrische ruimte (Y, d_Y) en elke isometrie $f\colon X \to Y$ is er een unieke isometrie $g\colon \tilde{X} \to Y$ zodanig dat $g \circ \iota = f$.

1. Een metrische ruimte (X, d) heet *discreet* als voor elke $x \in X$ de deelverzameling $\{x\}$ open is in X. Zij X de metrische deelruimte $\{2^{-n} \mid n \geq 0\}$ van $\mathbf{R}$.

(a) Laat zien dat X discreet, maar niet volledig is.

(b) Beschrijf de completering van X. Laat zien dat deze niet discreet is.

2. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten, en zij $i\colon X \to X'$ een afbeelding. Bewijs dat $i\colon X \to X'$ een completering van (X, d) is dan en slechts dan als de volgende drie uitspraken gelden:

(1) (X', d') is volledig;

(2) i is een isometrie;

(3) $i(X)$ ligt dicht in X'.

[Dit laat zien dat de definitie uit het college equivalent is met de definitie in het boek (Runde, Definition 2.4.10).]

3. Zij X een metrische deelruimte van $\mathbf{R}^n$ (met de euclidische metriek), en zij $\bar{X}$ de afsluiting van X in $\mathbf{R}^n$. Bewijs dat $\bar{X}$ samen met de inclusieafbeelding $X \to \bar{X}$ een completering van X is.

4. Bewijs dat er een unieke topologie op $\mathbf{R}^2$ bestaat waarvoor de gesloten verzamelingen precies de eindige verenigingen van punten en lijnen zijn.

5. (Runde, 3.1.6.) Voor alle $a, b \in \mathbf{Z}$ met $b > 0$ definiëren we

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Voor $a \in \mathbf{Z}$ definiëren we $\mathfrak{N}_a$ als de verzameling van alle deelverzamelingen $N \subseteq \mathbf{Z}$ zodanig dat er een $b > 0$ is met $N_{a,b} \subseteq N$.

(a) Bewijs dat er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op $\mathbf{Z}$ is zodanig de omgevingen van $a \in \mathbf{Z}$ met betrekking tot $\mathcal{T}$ precies de elementen van $\mathfrak{N}_a$ zijn. (Aanwijzing: Theorem 3.1.10 in het boek.)

(b) Bewijs dat elke open deelverzameling van $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ ofwel oneindig ofwel leeg is.

(c) Bewijs dat alle verzamelingen $N_{a,b}$ zowel open als gesloten zijn.

(d) Bewijs dat $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ de vereniging is van de verzamelingen $N_{0,p}$ met p een priemgetal.

(e) Leid uit de eerdere onderdelen af dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

6. Een *Hausdorffruimte* is een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \emptyset$.

(a) Laat zien dat als $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is en $x \in X$, de deelverzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten is.

(b) Laat zien dat elke topologische deelruimte van een Hausdorffruimte weer een Hausdorffruimte is.

7. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Zijn $X' \subseteq X$ en $Y' \subseteq Y$ deelverzamelingen zodanig dat $f(X') \subseteq Y'$. Bewijs dat de door f geïnduceerde afbeelding $f'\colon X' \to Y'$ continu is.

8. Zijn X, Y topologische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding.

(a) Zijn X_1, X_2 open deelverzamelingen van X zodanig dat $X = X_1 \cup X_2$ en zodanig dat de beperkingen $f|_{X_1}\colon X_1 \to Y$ en $f|_{X_2}\colon X_2 \to Y$ continu zijn. Bewijs dat f continu is.

(b) Zelfde vraag met "gesloten" in plaats van "open".

9. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet *open* als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ het beeld $f(U) \subseteq Y$ een open deelverzameling van Y is.

(a) Geef een voorbeeld van een continue afbeelding die niet open is.

(b) Geef een voorbeeld van een open afbeelding die niet continu is.

10. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *samenhangend* als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.

(a) Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is dan en slechts dan als $X \neq \emptyset$ en de enige deelverzamelingen van X die zowel open als gesloten zijn, de verzamelingen $\emptyset$ en X zijn.

(b) We voorzien $\{0, 1\}$ van de discrete topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is dan en slechts dan als er precies twee continue afbeeldingen van $(X, \mathcal{T})$ naar $\{0, 1\}$ zijn.