TENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 7 juni 2016, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Tenzij anders aangegeven, heeft $\mathbf{R}^n$ de euclidische metriek en topologie.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $\min\{10, 1 + (\text{aantal punten})/10\}$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **zes** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(12 pt) **1.** In $\mathbf{R}$ bekijken we de deelruimten $\emptyset$, $\mathbf{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,\infty)$, $\mathbf{Q}$. Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, discreet, rijcompact, volledig.

(12 pt) **2.** Zij (X,d) een metrische ruimte, en zij $f\colon X \to X$ een continue afbeelding.

(a) Bewijs dat de functie $g\colon X \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $g(x) = d(x, f(x))$ continu is.

(b) Stel dat de metrische ruime X begrensd is. Bewijs dat de functie g begrensd is.

(16 pt) **3.** Zij $\mathcal{T}$ de collectie van deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ gedefinieerd door $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbf{R}\} \cup \{(a,\infty) \mid a \in \mathbf{R}\}$ (met de gebruikelijke notatie $(a,\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$).

(a) Bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{R}$ is.

(b) Geef (*met* bewijs) aan welke van de volgende eigenschappen de topologische ruimte $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ heeft: compact, Hausdorffs, samenhangend.

(16 pt) **4.** (a) Definieer het begrip *eenpuntscompactificatie* van een topologische ruimte.

(b) Bekijk de open eenheidsschijf $D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, de eenheidsbol $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en de continue afbeelding $\iota\colon D \to S^2$ gedefinieerd door $\iota(u,v) = (2u\sqrt{1-r^2}, 2v\sqrt{1-r^2}, 2r^2 - 1)$, met $r^2 = u^2 + v^2$. Laat zien dat (S^2, ι) een eenpuntscompactificatie van D is.

(16 pt) **5.** Zij X de deelruimte van $\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \text{ of } x \in \mathbf{Q}\}$.

(a) Laat zien dat X samentrekbaar is. (Hint: toon aan dat er homotopieën bestaan tussen de volgende afbeeldingen van X naar X: de identiteit, de afbeelding $(x,y) \mapsto (x,0)$ en de afbeelding $(x,y) \mapsto (0,0)$.)

(b) Laat zien dat X wegsamenhangend is, maar niet lokaal wegsamenhangend.

(16 pt) **6.** (a) Bepaal (met onderbouwing) de fundamentaalgroep van de topologische ruimte $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$ met basispunt $(1,0,0)$.

(b) Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij Y de samenhangscomponent van X die x_0 bevat. Bewijs dat de fundamentaalgroepen $\pi_1(Y, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$ isomorf zijn.

(16 pt) **7.** Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zij $X \times Y$ de productruimte. We bekijken de afbeelding $p\colon X \times Y \to X$ gedefinieerd door $p(x,y) = x$.

(a) Laat zien dat voor elke open deelverzameling $U \subseteq X \times Y$ de deelverzameling $p(U) \subseteq X$ open is in X.

(b) Stel dat Y compact is. Laat zien dat voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq X \times Y$ de deelverzameling $p(F) \subseteq X$ gesloten is in X.

Succes!