Antwoorden Topologie Tentamen Juni 2016

Team Topo

16 mei 2017

Opgave 1. In $\mathbb{R}$ bekijken we de deelruimten $\emptyset,\ \mathbb{R},\ [0,1],\ (0,1),\ [0,\infty),\ \mathbb{Q}$. Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, discreet, rijcompact, volledig.

Antwoord.
$\emptyset$: open, discreet, rijcompact, volledig. $\mathbb{R}$: open, volledig. $[0,1]$: rijcompact, volledig. $(0,1)$: open. $[0,\infty)$: volledig. $\mathbb{Q}$: geen van bovenstaande eigenschappen.

Opgave 2. Zij (X,d) een metrische ruimte, en zij $f : X \to X$ een continue afbeelding.

(a) Bewijs dat de functie $g : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = d(x, f(x))$ continu is.
Antwoord.
Voor alle $a, x \in X$ geldt uit de driehoeksongelijkheid

$$d(x,f(x)) \leq d(x,a) + d(a,f(a)) + d(f(a),f(x)) \text{ en } d(a,f(a)) \leq d(x,a) + d(x,f(x)) + d(f(a),f(x)),$$

en dus hebben we het volgende

$$d(x,f(x)) - d(a,f(a)) \leq d(x,a) + d(f(a),f(x)) \text{ en } d(a,f(a)) - d(x,f(x)) \leq d(x,a) + d(f(a),f(x)).$$

Hieruit concluderen we dat $|d(x,f(x)) - d(a,f(a))| \leq d(x,a) + d(f(a),f(x))$. Laat nu $a \in X$ en $\epsilon > 0$. Uit de continuïteit van f volgt nu dat er een $\delta' > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in X$ geldt

$$d(x,a) < \delta' \Rightarrow d(f(a),f(x)) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Neem nu $\delta := \min\{\delta', \frac{\epsilon}{2}\}$ en stel $d(x,a) < \delta$, dan geldt voor alle $x \in X$ dat

$$|d(x,f(x)) - d(a,f(a))| \leq d(x,a) + d(f(a),f(x)) < \delta + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dit bewijst het gevraagde. ■

(b) Stel dat de metrische ruimte X begrensd is. Bewijs dat de functie g begrensd is.
Antwoord.
X is begrensd dus bestaat er een positief reëel getal M zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x,y) < M$. Merk op dat dan tevens voor alle $x, y \in X$ geldt

$$|g(x) - g(y)| = |d(x,f(x)) - d(y,f(y))| \leq d(x,f(x)) + d(y,f(y)) < 2M.$$

Dit bewijst het gevraagde. ■

Opgave 3. Zij $\mathcal{T}$ de collectie van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) | \, a \in \mathbb{R}\}$ (met de gebruikelijke notatie $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x\}$).

(a) Bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbb{R}$ is.
Antwoord.
1. Er geldt $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. 2. Voor een willekeurige vereniging $\cup_{U \in \mathcal{U}} U$ met $\mathcal{U} \subset \{(a, \infty) | \, a \in \mathbb{R}\}$ geldt voor een willekeurige index set I dat $\cup_{U \in \mathcal{U}} U = \cup_{i \in I} (a_i, \infty) = (\inf_{i \in I}\{a_i\}, \infty) \in \mathcal{T}$ of $\cup_{U \in \mathcal{U}} U = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (als het infimum niet bestaat). Dus volgt voor $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ dat $\cup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$.
3. Voor elke eindige doorsnede $\cap_{i=1}^n U_i$ met $U_i = (a_i, \infty)$ geldt $\cap_{i=1}^n U_i = \cap_{i=1}^n (a_i, \infty) = (\max_{1 \leq i \leq n}\{a_i\}, \infty)$. Dus $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$. ■

(b) Geef (*met* bewijs) aan welke van de volgende eigenschappen de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ heeft: compact, Hausdorff, samenhangend.
Antwoord.
Compact. Merk op dat de open overdekking $\{(n, \infty) | \, n \in \mathbb{Z}\}$ geen eindige deeloverdekking heeft.
Hausdorff. Stel $x, y \in \mathbb{R}$ dan geldt dat een open omgeving van x van de vorm (a, ∞) is met $x > a$ en (b, ∞) een open omgeving van y is met $y > b$. Nu geldt dat $(a, \infty) \cap (b, \infty) \neq \emptyset$ en dus is de ruimte niet Hausdorff.
Samenhangend. Merk op dat voor $U \in \{(a, \infty) | \, a \in \mathbb{R}\}$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$ geldt $\mathbb{R} \setminus U = (-\infty, a) \notin \mathcal{T}$. Oftewel we concluderen dat $\emptyset, \mathbb{R}$ de enige twee clopen verzamelingen zijn en dus is de ruimte samenhangend.

Opgave 4. (a) Definieer het begrip *eenpuntscompactificatie* van een topologische ruimte.
Antwoord.
Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van $(X, \mathcal{T})$ is een compacte Hausdorffruimte $(X^\infty, \mathcal{T}^\infty)$ samen met een continue afbeelding $i : (X, \mathcal{T}) \to (X^\infty, \mathcal{T}^\infty)$ zodanig dat $i : X \to i(X)$ een homeomorfisme is en $X^\infty \setminus i(X)$ uit één punt bestaat.

(b) Bekijk de open eenheidsschijf $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$, de eenheidsbol $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en de continue afbeelding $i : D \to S^2$ gedefinieerd door $i(u, v) = (2u\sqrt{1 - r^2}, 2v\sqrt{1 - r^2}, 2r^2 - 1)$, met $r^2 = u^2 + v^2$. Laat zien dat (S^2, i) een eenpuntscompactificatie van D is.
Antwoord.
Er geldt dat S^2 inderdaad een compacte Hausdorffruimte is. Daarnaast geldt

$$(2u\sqrt{1 - r^2})^2 + (2v\sqrt{1 - r^2})^2 + (2r^2 - 1)^2 = 1.$$

Merk tevens op dat $(0, 0, 1)$ niet in het codomein ligt en dus geldt $i(D) = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Verder hebben we de inverse $i^{-1} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to D$ gedefinieerd door $i^{-1}(x, y, z) = (\frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{2x^2+2y^2}} x, \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{2x^2+2y^2}} y)$ (Men kan ook eerst een homeomorfisme opstellen tussen S^2 en $\mathbb{R}$ en vervolgens tussen $\mathbb{R}$ en D). Tevens geldt dat $S^2 \setminus i(D) = \{(0, 0, 1)\}$ dus uit één punt bestaat. ■

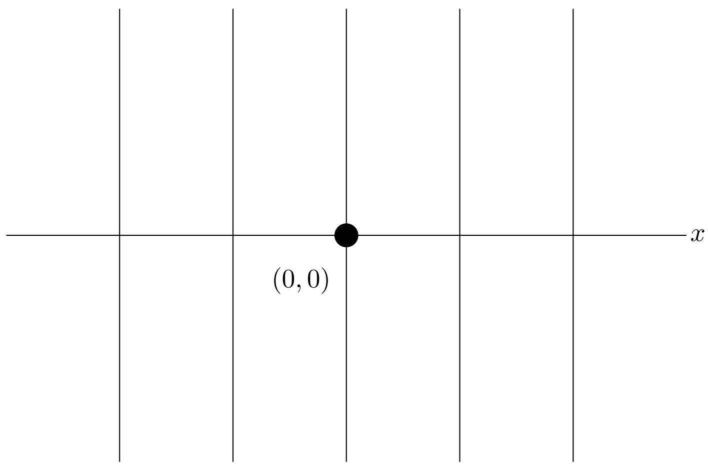
Opgave 5. Zij X de deelruimte van $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0 \text{ of } x \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Laat zien dat X samentrekbaar is. (Hint: toon aan dat er homotopieën bestaan tussen de volgende afbeeldingen van X naar X: de identiteit, de afbeelding $(x, y) \mapsto (x, 0)$ en de afbeelding $(x, y) \mapsto (0, 0)$.)
Antwoord.
We noteren $i : X \to X$, $i(x, y) = (x, y)$; $f : X \to X$, $f(x, y) = (x, 0)$; en $g : X \to X$, $g(x, y) = (0, 0)$ voor de afbeeldingen van de hint.
Zij $F : [0, 1] \times X \to X$ met $F(t,(x, y)) = (1-t)(x, y) + t(x, 0)$. Er geldt $(1-t)(x, y) + t(x, 0) = (x,(1-t)y)$. Aangezien $x \in \mathbb{Q}$, geldt $F(t,(x, y)) \in X$ voor alle $t \in [0, 1], (x, y) \in X$.
Verder is F duidelijk continu, en er geldt $F(0,(x, y)) = (x, y)$ en $F(1,(x, y)) = (x, 0)$. Dus $i \sim f$.

Zij $G : [0, 1] \times X \to X$ met $G(t,(x, y)) = (1 - t)(x, 0) + t(0, 0)$. Er geldt $(1 - t)(x, 0) + t(0, 0) = ((1 - t)x, 0)$. Aangezien de tweede coördinaat van $G(t,(x, y))$ gelijk is aan 0, geldt $G(t,(x, y)) \in X$ voor alle $t \in [0, 1], (x, y) \in X$.
Verder is G duidelijk continu, en er geldt $G(0,(x, y)) = (x, 0)$ en $G(1,(x, y)) = (0, 0)$. Dus $f \sim g$.

Vanwege de transitiviteit van de equivalentierelatie van de homotopie geldt $i \sim g$. Oftewel de identiteit op X is homotoop met de constante afbeelding met beeld $(0, 0) \in X$, dus X is samentrekbaar. ■

(b) Laat zien dat X wegsamenhangend is, maar niet lokaal wegsamenhangend.
Antwoord.



Figuur 1. Een manier om X grafisch voor te stellen.

Zij $(x, y),(x', y') \in X$.
Laat $\gamma_1 : [0, 1] \to X, t \mapsto (1 - t)(x, y) + t(x, 0)$ het pad van (x, y) naar $(x, 0)$ zijn.
Laat $\gamma_2 : [0, 1] \to X, t \mapsto (1 - t)(x, 0) + t(x', 0)$ het pad van $(x, 0)$ naar $(x', 0)$ zijn.
Laat $\gamma_3 : [0, 1] \to X, t \mapsto (1 - t)(x', 0) + t(x', y')$ het pad van $(x', 0)$ naar (x', y') zijn.
Dan is $\gamma_1 \odot \gamma_2 \odot \gamma_3$ een pad van (x, y) naar (x', y').

Zij $\epsilon \in \mathbb{R}$ zodat $\epsilon < 5$. Beschouw $B_\epsilon((0, 5))$. Er zitten oneindig veel verticale lijnsegmenten in $B_\epsilon((0, 5))$ die niet met elkaar verbonden zijn. Op die manier is $B_\epsilon((0, 5))$ niet wegsamenhangend. ■

Opgave 6.(a) Bepaal (met onderbouwing) de fundamentaalgroep van de topologische ruimte $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ met basispunt $(1, 0, 0)$.

Antwoord.

Merk op dat S hier met de stereografische projectie homeomorf is met $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Wanneer we nu kijken naar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to S^1$, met $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$ en $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de natuurlijke inbedding. Dan zien we dat $f \circ i$ inderdaad de identiteit op S^1 is en dat $i \circ f$ homotoop is met de identiteit op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ door $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ met $F(t, (x, y)) = tf(x, y) + (1 - t)(x, y)$. Merk op dat F goed gedefinieerd is (ga na: $F(t, (x, y)) \neq 0$) en inderdaad een homotopie geeft tussen $i \circ f$ en $id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$. We concluderen dat S^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en dus ook $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en S dezelfde fundamentaalgroep hebben die dus isomorf is met $\mathbb{Z}$.

(b) Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij Y de samenhangscomponent van X die x_0 bevat. Bewijs dat de fundamentaalgroepen $\pi_1(Y, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$ isomorf zijn.

Antwoord.

In een werkcollege (opgave 91) is aangetoond dat de wegsamenhangscomponent van x_0 bevat is in de samenhangscomponent Y van x. Dus de inclusie $i : Y \hookrightarrow X$ induceert een isomorfisme $i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
De afbeelding i_* is een homomorfisme, want elke aaneenschakeling van niet-homotope lussen in Y levert een aaneenschakeling van niet-homotope lussen in X.
Injectiviteit volgt uit het feit dat niet-homotope lussen in Y ook in X niet homotoop zijn.
Surjectiviteit volgt uit de continuïteit van de lussen. Van elke lus in X moet het beeld van die lus in Y bevat zijn.■

Opgave 7.

Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zij $X \times Y$ de productruimte. We bekijken de afbeelding $p : X \times Y \to X$ gedefinieerd door $p(x, y) = x$.

(a) Laat zien dat voor elke open deelverzameling $U \subset X \times Y$ de deelverzameling $p(U) \subset X$ open is in X.

Antwoord.

In het college is getoond dat voor een eindig product als $X \times Y$ de producttopologie gegeven wordt door $\{A \times B : A \text{ open in } X, B \text{ open in } Y\}$.
Dus geldt $U = A \times B$ met A open in X en B open in Y, waar meteen uit volgt dat $p(U) \subset X$ open is in X. ■

(b) Stel dat Y compact is. Laat zien dat voor elke gesloten deelverzameling $F \subset X \times Y$ de deelverzameling $p(F) \subset X$ gesloten is in X.

Antwoord.

Zij $x_0 \in X \backslash p(F)$. Dan geldt voor alle $y \in Y$ dat $(x_0, y) \notin F$.
Aangezien F gesloten is, is $(X \times Y) \backslash F$ open. Dus kunnen we een open verzameling $U_y \times V_y \subset (X \times Y) \backslash F$ vinden zodanig dat $(x_0, y) \in U_y \times V_y$.
De verzameling $\{V_y : y \in Y\}$ vormt een open overdekking van Y. De compactheid van Y zorgt ervoor dat we Y kunnen overdekken met een eindig aantal, zeg $Y = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$.
Definieer $U := \cap_{i=1}^n U_{y_i}$. Dit is een open omgeving van x_0 met $U \subset X \backslash p(F)$.
Dus $p(F)$ is gesloten. ■