

Topologie

Voorjaar 2017

Docent: Peter Bruin

P.J.Bruin@math.leidenuniv.nl

Versie van 9 juni 2017

Dit dictaat wordt regelmatig bijgewerkt, maar kan nog fouten bevatten.
Commentaar, suggesties en correcties worden op prijs gesteld.

Inhoudsopgave

Inleiding	2
1. Metrische ruimten	2
2. Open en gesloten verzamelingen	3
3. Inwendige, afsluiting, rand, dichtheid	6
4. Convergentie van rijen	8
5. Continue afbeeldingen tussen metrische ruimten	9
6. Volledigheid	10
7. Completering	12
8. Topologische ruimten	14
9. Continue afbeeldingen tussen topologische ruimten	17
10. Homeomorfismen	17
11. Bases en de producttopologie	18
12. Compactheid	19
13. Lokaal compacte ruimten en compactificaties	23
14. De stelling van Tichonov	24
15. Wegen	25
16. Samenhang en wegsamenhang	26
17. (Weg)samenhangscomponenten	28
18. Lokale (weg)samenhang	30
19. Homotopie en weghomotopie	31
20. De fundamenteaalgroep	36
21. Overdekkingsruimten en het liften van wegen	37
22. Een groepswerking van de fundamenteaalgroep	40
23. De fundamenteaalgroep van de cirkel	42
24. Homotopie-equivalentie	43
25. Fundamenteaalgroepen, continue afbeeldingen en homotopie	44
Opgaven	48

Inleiding

Dit is een verzameling aantekeningen en opgaven voor het college Topologie, gegeven in het voorjaar van 2016. Het college volgt grotendeels het boek *A Taste of Topology* van Volker Runde, hoofdstukken 2, 3 en 5. Het grootste deel van de behandelde stof staat ook in dit dictaat, maar voor een aantal zaken verwijzen we naar het boek. Sommige onderwerpen worden in dit dictaat daarentegen op een andere manier uitgelegd dan in het boek.

1. Metrische ruimten

In de topologie wordt onder andere het begrip *continuïteit* uit de analyse gegeneraliseerd.

Definitie. Zij D een deelverzameling van \mathbf{R} . Een functie $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ is *continu* in een punt x als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $y \in D$ geldt

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Onnauwkeurig gezegd: als y dicht genoeg bij x ligt, dan ligt $f(y)$ dicht bij $f(x)$. Het begrip afstand lijkt voor de notie van continuïteit dus van belang te zijn. De eerste stap in de richting van een algemene definitie van continue afbeeldingen (hiervoor zullen we later het begrip *topologische ruimte* introduceren) is het definiëren van ruimten die voorzien zijn van een afstandsfunctie. We zullen later echter een definitie van continuïteit invoeren die niet naar een afstandsfunctie verwijst.

Definitie. Een *metriek* of *afstandsfunctie* op een verzameling X is een functie

$$d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

met de volgende eigenschappen:

- (1) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) \geq 0$, met gelijkheid dan en slechts dan als $x = y$ (*positief-definietheid*).
- (2) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) = d(y, x)$ (*symmetrie*).
- (3) Voor alle $x, y, z \in X$ geldt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*driehoeksongelijkheid*).

Een *metrische ruimte* is een paar (X, d) waarbij X een verzameling is en $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ een metriek.

Als de metriek d uit de context duidelijk is, wordt (X, d) vaak afgekort tot X .

Voorbeelden. (1) Als V een reële of complexe vectorruimte is en $\| \cdot \|$ een norm op V , dan is de functie

$$\begin{aligned} d: V \times V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

een metriek op V . Een belangrijk speciaal geval is $V = \mathbf{R}^n$ met de norm $\| \cdot \|$ gedefinieerd door het standaardinproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dus

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.\end{aligned}$$

De bijbehorende metriek

$$\begin{aligned}d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\end{aligned}$$

heet de *euclidische metriek* op \mathbf{R}^n .

(2) De functie

$$\begin{aligned}d: \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto |x - x'| + |y - y'|\end{aligned}$$

is een metriek op \mathbf{Z}^2 . Deze staat bekend als de *Manhattan-* of *taximetriek*. Deze metriek kan ook afgeleid worden uit de L^1 -norm op \mathbf{R}^2 , die gedefinieerd is door

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

(3) Zij (F, d) een metrische ruimte en $p \in F$. Stel dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

Dan noemen we d een *Franse-spoorwegmetriek* met centrum p . (De snelste treinreis via twee Franse steden loopt vaak via Parijs.)

(4) Zij X een verzameling en definieer $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ door

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Dan is (X, d) een metrische ruimte. Dit is een voorbeeld van een *discrete* metrische ruimte.

(5) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X . Dan is de beperking $d|_{Y \times Y}$ van d tot de deelverzameling $Y \times Y$ van $X \times X$ een metriek op Y (ga na). Metrische ruimten van de vorm $(Y, d|_{Y \times Y})$ heten *metrische deelruimten* van (X, d) .

2. Open en gesloten verzamelingen

Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $x \in X$ en zij r een positief reëel getal. Naar analogie met de euclidische ruimte definiëren we de *open bal van straal r om x* als

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

In het geval $X = \mathbf{R}$ (met de euclidische metriek) zijn open ballen hetzelfde als niet-lege, begrensde, open intervallen. Naar analogie met de euclidische metriek definiëren we nu algemene open verzamelingen als volgt.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *open deelverzameling* van X is een deelverzameling $U \subseteq X$ zodanig dat er voor elke $x \in U$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x)$ bevat is in U .

Propositie 2.1. Zij (X, d) een metrische ruimte.

- (a) Elke open bal in X is een open deelverzameling van X .
- (b) Een deelverzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een vereniging van open ballen is.

Bewijs. (a) Zij $B_\epsilon(x)$ een open bal van straal ϵ om een punt $x \in X$, en zij $y \in B_\epsilon(x)$ willekeurig gegeven. We moeten bewijzen dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat de open bal $B_\delta(y)$ van straal δ om y in $B_\epsilon(x)$ bevat is. We kiezen $\delta = \epsilon - d(x, y)$; dit is positief omdat y in $B_\epsilon(x)$ ligt. Voor alle $z \in B_\delta(y)$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &< d(x, y) + \delta \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

en hiermee is bewezen dat $B_\delta(y) \subseteq B_\epsilon(x)$.

(b) Zij U een deelverzameling van X . Stel dat U een verzameling van open ballen is, en zij $x \in U$. Wegens de aanname bestaan er $y \in X$ en $\epsilon > 0$ zodanig dat

$$x \in B_\epsilon(y) \subseteq U.$$

Wegens (a) is $B_\epsilon(y)$ open, dus er is een open bal rond x die bevat is in $B_\epsilon(y)$ en dus in U . Omdat dit voor alle $x \in U$ geldt, volgt dat U open is. Stel omgekeerd dat U open is. Dan is voor elke $x \in U$ de verzameling

$$E(x, U) = \{\epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x) \subseteq U\}$$

niet-leeg. Er geldt dus

$$x \in \bigcup_{\epsilon \in E(x, U)} B_\epsilon(x) \subseteq U.$$

Nemen we nu de vereniging over alle $x \in U$, dan zien we

$$U = \bigcup_{x \in U} \bigcup_{\epsilon \in E(x, U)} B_\epsilon(x),$$

dus U is een vereniging van open ballen. □

Definitie. Zij X een metrische ruimte. Een *gesloten deelverzameling* van X is een deelverzameling $F \subseteq X$ zodanig dat het complement $X \setminus F$ een open deelverzameling van X is.

Voorbeeld. Zij X een metrische ruimte, $x \in X$ en $r > 0$. De *gesloten bal* van straal r om x is gedefinieerd als

$$B_r[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

We beweren dat $B_r[x]$ inderdaad een gesloten deelverzameling van X is, met andere woorden dat $X \setminus B_r[x]$ open is. Zij $y \in X \setminus B_r[x]$; dan geldt $d(x, y) > r$. We schrijven $\epsilon = d(x, y) - r$. Voor alle z in de open bal $B_\epsilon(y)$ geeft de driehoeksongelijkheid

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \epsilon.$$

Hieruit volgt

$$d(x, z) > d(x, y) - \epsilon = r,$$

dus $B_\epsilon(y)$ is bevat in $X \setminus B_r[x]$, hetgeen we moesten bewijzen.

Propositie 2.2. *Zij X een metrische ruimte.*

- (a) *Elke vereniging van open deelverzamelingen van X is open.*
- (b) *Elke doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van X is open.*
- (c) *Elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.*
- (d) *Elke vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.*

Opmerking. Als \mathcal{Y} een collectie deelverzamelingen van X is, dan zijn de verzamelingen $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ en $\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ voor $\mathcal{Y} = \emptyset$ gelijk aan \emptyset respectievelijk X . In het bijzonder volgt uit de propositie dat \emptyset en X zowel open als gesloten deelverzamelingen van X zijn.

Bewijs. (a) Zij \mathcal{U} een collectie open deelverzamelingen van X , en zij U' de verzameling $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Wegens propositie 2.1 is elke $U \in \mathcal{U}$ een vereniging van open ballen, en derhalve geldt dit ook voor U' .

(b) We bewijzen met inductie naar n dat de doorsnede van n open deelverzamelingen open is. Het geval $n = 0$ (X is open) volgt uit de definitie van open deelverzamelingen. Stel dat voor gegeven $n \geq 0$ elke vereniging van n open deelverzamelingen open is. Als U_0, \dots, U_n open zijn, dan is $U = \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i$ open wegens de inductieveronderstelling; we moeten bewijzen dat $U' = U \cap U_n$ open is. Zij $x \in U'$. Er bestaan $\epsilon > 0$ en $\epsilon_n > 0$ zodanig dat $B_\epsilon(x) \subseteq U$ en $B_{\epsilon_n}(x) \subseteq U_n$. Neem nu $\epsilon' = \min\{\epsilon, \epsilon_n\}$; dan geldt $B_{\epsilon'}(x) \subset U'$. Dit geldt voor alle $x \in U'$, dus U' is open.

De beweringen (c) en (d) volgen uit (a) en (b) door het nemen van complementen. □

We eindigen met twee definities die in veel contexten voorkomen.

Definitie. Zij X een metrische ruimte. Een *omgeving* van x is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $\epsilon > 0$ bestaat met $B_\epsilon(x) \subseteq N$.

Een open omgeving van x is uiteraard een omgeving van x die ook een open deelverzameling van X is, oftewel een open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $x \in U$.

Definitie. Een metrische ruimte X heet *discreet* als voor elke $x \in X$ de deelverzameling $\{x\}$ open is in X .

Propositie 2.3. *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is discreet;
- (2) elke deelverzameling van X is open;
- (2) elke deelverzameling van X is gesloten.

Bewijs. Opgave. □

3. Inwendige, afsluiting, rand, dichtheid

Voortbouwend op de noties van open en gesloten deelverzamelingen zullen we nu een aantal nieuwe begrippen invoeren. Het blijkt dat dit gedaan kan worden zonder expliciet naar de metriek te verwijzen.

Definitie. Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . Het *inwendige* van S in X , notatie S° , is de grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $U \subseteq S$. De *afsluiting* van S in X , notatie \bar{S} , is de kleinste gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $S \subseteq F$.

Om er zeker van te zijn dat de definitie van het inwendige betekenis heeft, moeten we nagaan dat er daadwerkelijk zo'n grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ bestaat. Met andere woorden, zij \mathcal{U} de verzameling van alle open deelverzamelingen van X die in S bevat zijn, geordend onder inclusie. Dan moeten we aantonen dat \mathcal{U} een (noodzakelijkerwijs uniek) grootste element heeft. Dit element bestaat: de verzameling $U' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ is open en is bevat in S , dus U' is het (unieke) grootste element van \mathcal{U} . Op dezelfde manier kunnen we nagaan dat de definitie van de afsluiting betekenis heeft (de doorsnede van alle gesloten deelverzamelingen die S bevatten is zelf ook een gesloten deelverzameling die S bevat, en daarmee automatisch de kleinste).

Propositie 3.1. *Zij X een metrische ruimte. Het nemen van het inwendige en van de afsluiting in X zijn complementaire bewerkingen in de zin dat voor alle deelverzamelingen $S \subseteq X$ geldt*

$$X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$$

en

$$X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}.$$

Bewijs. Opgave. □

Propositie 3.2. *Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X .*

(a) *Het inwendige van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat er een omgeving van x bestaat die bevat is in S .*

(b) *De afsluiting van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x een niet-lege doorsnede met S heeft.*

Bewijs. (a) Stel dat x in S° ligt. Omdat S° open is in X , is S° zelf een omgeving van x die bevat is in S . Stel omgekeerd dat x een omgeving heeft die bevat is in S . Dan heeft x ook een open omgeving die geheel binnen S ligt, en deze open omgeving is op haar beurt bevat in S° .

(b) Dit volgt uit de volgende keten van equivalenties:

$$\begin{aligned} x \in \bar{S} &\iff x \notin (X \setminus S)^\circ \\ &\iff \text{geen enkele omgeving van } x \text{ is bevat in } X \setminus S \\ &\iff \text{elke omgeving van } x \text{ heeft niet-lege doorsnede met } S, \end{aligned}$$

waarbij we in de eerste stap propositie 3.1 gebruikt hebben. \square

Definitie. *Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De rand van S in X , notatie ∂S , is de gesloten deelverzameling van X gedefinieerd door*

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}.$$

Propositie 3.3. *Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De rand van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x zowel met S als met $X \setminus S$ een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. Dit volgt uit de definitie van ∂S en propositie 3.2. \square

Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ is ∂S wegens de definitie en propositie 3.1 te schrijven als

$$\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ.$$

Dit betekent dat X te schrijven is als een disjuncte vereniging

$$\begin{aligned} X &= \bar{S} \sqcup (X \setminus \bar{S}) \\ &= \bar{S} \sqcup (X \setminus S)^\circ \\ &= S^\circ \sqcup \partial S \sqcup (X \setminus S)^\circ. \end{aligned}$$

Definitie. *Zij X een metrische ruimte. Een deelverzameling $S \subseteq X$ heet dicht in X als de afsluiting van S gelijk is aan X .*

Waarschuwing. Bij het gebruiken van de hierboven ingevoerde begrippen (open en gesloten verzamelingen, inwendige, afsluiting, rand en dichtheid) is het belangrijk om steeds in gedachten te houden op welke omliggende metrische ruimte X ze betrekking hebben. Bekijk bijvoorbeeld de metrische deelruimte $X = [0, 1)$ van \mathbf{R} . Met betrekking tot de metrische ruimte X geldt: X is zowel open als gesloten, dus $X^\circ = X = \bar{X}$ en $\partial X = \emptyset$, en X is dicht. Met betrekking tot de metrische ruimte \mathbf{R} geldt echter: X is noch open noch gesloten, $X^\circ = (0, 1)$, $\bar{X} = [0, 1]$, $\partial X = \{0, 1\}$ en X is niet dicht.

4. Convergentie van rijen

De bekende definitie van convergentie voor rijen van reële getallen is zonder problemen te vertalen naar de context van metrische ruimten.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X , en zij $x \in X$. De rij $(x_n)_{n \geq 0}$ is *convergent (met limiet x)*, of *convergeert naar x* , als er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat $d(x, x_n) < \epsilon$ voor alle $n \geq N$. Notatie: $x_n \rightarrow x$ als $n \rightarrow \infty$, of $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Propositie 4.1. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X . Dan heeft $(x_n)_{n \geq 0}$ ten hoogste één limiet.

Bewijs. Stel dat de rij twee verschillende limieten x en x' heeft. Zij $\delta = d(x, x') > 0$. Wegens de definitie van convergentie bestaat er een $n \geq 0$ waarvoor geldt $d(x, x_n) < \delta/2$ en $d(x', x_n) < \delta/2$. Hieruit volgt

$$\delta = d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

een tegenspraak. □

Propositie 4.2. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . Dan is de afsluiting \bar{S} de verzameling van punten van X die de limiet zijn van een rij in S die in X convergeert.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in S die in X convergeert naar x . Voor alle $\epsilon > 0$ geldt voor $n \geq 0$ voldoende groot dat $x_n \in B_\epsilon(x)$, dus $B_\epsilon(x)$ heeft niet-lege doorsnede met S . Hieruit volgt $x \in \bar{S}$.

Zij omgekeerd $x \in \bar{S}$. Dan is voor elke $n \geq 0$ de doorsnede van $B_{2^{-n}}(x)$ met S niet-leeg, dus er bestaat een $x_n \in S$ met $d(x_n, x) < 2^{-n}$. De rij $(x_n)_{n \geq 0}$ convergeert dus naar x . □

Gevolg 4.3. Zij X een metrische ruimte, en zij F een deelverzameling van X . Dan is F gesloten dan en slechts dan als voor elke rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in F die in X convergeert, de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in F ligt.

Voorbeelden. (1) Zij $B([0, 1], \mathbf{R})$ de verzameling van alle begrensde functies $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. De *uniforme metriek* op $B([0, 1], \mathbf{R})$ is gedefinieerd door

$$D(f, g) = \sup_{[0,1]} |f - g| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| \quad \text{voor alle } f, g \in B([0, 1], \mathbf{R}).$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat D inderdaad een metriek op $B([0, 1], \mathbf{R})$ is. Een rij functies $(f_n)_{n \geq 0}$ in $B([0, 1], \mathbf{R})$ convergeert met betrekking tot D dan en slechts dan als $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform convergeert.

(2) Op dezelfde manier introduceren we voor een verzameling $S \neq \emptyset$ en een metrische ruimte (Y, d) de verzameling $B(S, Y)$ van begrensde functies $S \rightarrow Y$ (zie opgave 13) voorzien van de *uniforme metriek*

$$D(f, g) = \sup_{s \in S} d(f(s), g(s)).$$

Dit geeft een algemene context voor het begrip uniforme convergentie.

5. Continue afbeeldingen tussen metrische ruimten

Ook de bekende definitie van continuïteit is zonder problemen te generaliseren naar metrische ruimten. Er blijkt een nuttige karakterisering van continue afbeeldingen te bestaan in termen van open verzamelingen.

Definitie. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten. Een *continue afbeelding* van X naar Y is een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat er voor elke $a \in X$ en elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Propositie 5.1. Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- (1) f is continu;
- (2) voor alle $a \in X$ en alle $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$.
- (3) voor elke convergente rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X met limiet a is de rij $(f(x_n))_{n \geq 0}$ in Y convergent met limiet $f(a)$;
- (4) voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq Y$ is $f^{-1}F$ een gesloten deelverzameling van X .
- (5) voor elke open deelverzameling $U \subseteq Y$ is $f^{-1}U$ een open deelverzameling van X ;

Bewijs. We bewijzen de onderstaande implicaties.

(1) \iff (2): Deze twee uitspraken zijn slechts herformuleringen van elkaar.

(2) \implies (3): Neem aan dat (2) geldt en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een convergente rij in X met limiet a . Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Wegens (2) is er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$. Wegens de convergentie van $(x_n)_{n \geq 0}$ is er $N \geq 0$ zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B_\delta(a)$. Hieruit volgt $f(x_n) \in B_\epsilon(f(a))$ voor alle $n \geq N$. Omdat ϵ willekeurig was, concluderen we dat $(f(x_n))_{n \geq 0}$ in Y convergeert naar $f(a)$.

(3) \implies (4): Neem aan dat (3) geldt, zij $G \subseteq Y$ gesloten, en zij $F = f^{-1}G$. We gaan bewijzen dat elke rij in F die convergeert in X haar limiet in F heeft; wegens gevolg 4.3 geldt dan $\bar{F} = F$, dus F is gesloten. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in F met limiet $a \in X$. Dan is $(f(x_n))_{n \geq 0}$ een rij in G die in Y convergeert naar $f(a)$. Omdat G gesloten is, geldt $f(a) \in G$ wegens gevolg 4.3. Dit is equivalent met $a \in F$, hetgeen we moesten bewijzen.

(4) \implies (5): Dit volgt uit $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}U$.

(5) \implies (2): Neem aan dat (5) geldt, en zijn $a \in X$ en $\epsilon > 0$ gegeven. Dan is $B_\epsilon(f(a))$ open in Y , dus per aanname is $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ open in X . Bovendien geldt $a \in f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$. Wegens de definitie van open verzamelingen bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$, hetgeen we moesten bewijzen. \square

Opmerking. Voor elke afbeelding van verzamelingen $f: X \rightarrow Y$ en alle deelverzamelingen $S \subseteq X$ en $T \subseteq Y$ geldt $S \subseteq f^{-1}T$ dan en slechts dan als $f(S) \subseteq T$. In de equivalente eigenschap (2) hierboven is de voorwaarde $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ dus equivalent met $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. De gegeven formulering van (2) is echter meer in de geest van de equivalente eigenschappen (4) en (5).

Voorbeelden. (1) Als X een discrete metrische ruimte is, dan is elke deelverzameling van X open, dus elke afbeelding van X naar een metrische ruimte Y is continu.

(2) Zij (X, d) een metrische ruimte. We voorzien de verzameling $X^2 = X \times X$ van de metriek

$$\begin{aligned} \tilde{d}: X^2 \times X^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto d(x, x') + d(y, y'). \end{aligned}$$

(Dit is een generalisatie van de Manhattanmetriek op \mathbf{R}^2 .) We beweren dat $d: (X^2, \tilde{d}) \rightarrow \mathbf{R}$ een continue afbeelding is. Zij $P_0 = (x_0, y_0) \in X^2$, en zij $\epsilon > 0$. Voor $P = (x, y) \in X^2$ geldt (zie Runde, Example 2.3.9)

$$\begin{aligned} |d(P) - d(P_0)| &= |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \\ &\leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \\ &= \tilde{d}(P, P_0). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle P in de open bal $B_\epsilon(P_0)$ in X^2 het punt $d(P)$ in de open bal $B_\epsilon(d(P_0))$ in \mathbf{R} ligt. Aangezien ϵ willekeurig was, is d continu.

6. Volledigheid

Het begrip *Cauchyrij* speelt een belangrijke rol in de constructie van de reële getallen. We voeren dit begrip ook in de context van metrische ruimten in.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *Cauchyrij* in X is een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ met de eigenschap dat er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Het is niet moeilijk na te gaan dat elke convergente rij een Cauchyrij is. Het omgekeerde geldt echter niet automatisch.

Definitie. Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als elke Cauchyrij in X convergeert.

Voorbeelden. (1) De metrische ruimte \mathbf{R} is volledig. Dit volgt uit de constructie van \mathbf{R} met behulp van equivalentieklassen van Cauchyrijen in \mathbf{Q} .

(2) Net zo is de metrische ruimte \mathbf{R}^n (met de euclidische metriek) volledig.

(3) Zij S een verzameling met de metriek d gegeven door $d(x, y) = 0$ voor $x = y$ en $d(x, y) = 1$ voor $x \neq y$. Dan is elke Cauchyrij in S uiteindelijk constant, dus (S, d) is volledig.

(4) Zij S een niet-lege verzameling, zij (Y, d) een volledige metrische ruimte, en zij $B(S, Y)$ de verzameling van begrensde functies $f: S \rightarrow Y$, voorzien van de uniforme metriek D (zie de voorbeelden na gevolg 4.3). We beweren dat $B(S, Y)$ volledig is met betrekking tot D . Zij dus $(f_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in $B(S, Y)$. Voor alle $s \in S$ en alle $m, n \geq 0$ geldt $d(f_m(s), f_n(s)) \leq D(f_m, f_n)$; hieruit volgt dat voor alle $s \in S$ de rij $(f_n(s))_{n \geq 0}$ in Y een Cauchyrij is. Omdat Y volledig is, kunnen we een functie $f: S \rightarrow Y$ definiëren als de puntsgewijze limiet

$$f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s).$$

We moeten bewijzen dat f begrensd is. Zij $\epsilon > 0$ willekeurig gegeven. Zij N zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $D(f_m, f_n) < \epsilon$. Voor alle $x \in S$ en $n \geq N$ geldt (omdat f de puntsgewijze limiet van $(f_n)_{n \geq 0}$ is, en wegens de continuïteit van d)

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} D(f_m, f_n) \leq \epsilon.$$

Zij $R = \sup_{s, t \in S} d(f_N(s), f_N(t))$. Voor alle $s, t \in S$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s), f_N(s)) + d(f_N(s), f_N(t)) + d(f_N(t), f(t)) \\ &< \epsilon + R + \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f in $B(S, Y)$ ligt. We beweren vervolgens dat $f_n \rightarrow f$ als $n \rightarrow \infty$. Dit volgt uit het feit dat voor alle $n \geq N$ geldt

$$D(f, f_n) = \sup_{x \in S} d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$$

en het feit dat ϵ willekeurig gekozen was.

Propositie 6.1. *Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een metrische deelruimte van X .*

- (1) *Als X volledig is en Y gesloten in X , dan is Y volledig.*
- (2) *Als Y volledig is, dan is Y gesloten in X .*

Bewijs. (1) Stel X is volledig en Y is gesloten in X . Elke Cauchyrij $(x_n)_{n \geq 0}$ in Y is ook een Cauchyrij in X en heeft dus een limiet $x \in X$. Aangezien Y gesloten is, geldt $x \in Y$ wegens gevolg 4.3. Hieruit volgt dat Y volledig is.

(2) Stel Y is volledig, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in Y die convergent is in X . Dan is $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in X en dus ook in Y . Aangezien Y volledig is, convergeert $(x_n)_{n \geq 0}$ in Y . Wegens gevolg 4.3 is Y gesloten. \square

Voorbeelden. (1) In \mathbf{R}^n (of algemener in elke volledige metrische ruimte) zijn de volledige metrische deelruimten wegens de propositie precies de gesloten deelverzamelingen.

(2) Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten met $X \neq \emptyset$ en Y volledig. Zij $BC(X, Y) \subseteq B(X, Y)$ de verzameling van begrensde continue functies $X \rightarrow Y$.

We beperken de uniforme metriek D op $B(X, Y)$ tot een metriek op $BC(X, Y)$. We beweren dat $BC(X, Y)$ gesloten is in $B(X, Y)$; wegens propositie 6.1 en de volledigheid van $B(X, Y)$ is $BC(X, Y)$ dan ook volledig. Zij dus $(f_n)_{n \geq 0}$ een rij in $BC(X, Y)$ die in $B(X, Y)$ convergeert naar f . We moeten bewijzen dat f continu is. Zij $a \in X$ en zij $\epsilon > 0$. We zoeken $\delta > 0$ waarvoor geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f(t), f(a)) < \epsilon.$$

Zij $n \geq 0$ zodanig dat $D(f_n, f) < \epsilon/3$, en zij δ zodanig dat geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f_n(t), f_n(a)) < \epsilon/3.$$

Voor alle $t \in B_\delta(a)$ geldt dan

$$\begin{aligned} d_Y(f(t), f(a)) &\leq d_Y(f(t), f_n(t)) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) \\ &\leq D(f, f_n) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + D(f_n, f) \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aangezien ϵ willekeurig was, is f continu. Hieruit volgt de bewering.

Definitie. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten. Een *isometrie* van (X, d) naar (X', d') is een afbeelding $f: X \rightarrow X'$ zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

7. Completering

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een *completering* van (X, d) is een volledige metrische ruimte (\tilde{X}, \tilde{d}) samen met een isometrie $\iota: (X, d) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$ met de volgende eigenschap: voor elke volledige metrische ruimte (Y, d_Y) en elke isometrie $f: (X, d) \rightarrow (Y, d_Y)$ is er een unieke isometrie $g: (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (Y, d_Y)$ zodanig dat $f = g \circ \iota$.

Een complettering is “uniek op een unieke bijectieve isometrie na”. Preciezer gezegd:

Lemma 7.1. Zij (X, d) een metrische ruimte. Als $((\tilde{X}_1, \tilde{d}_1), \iota_1)$ en $((\tilde{X}_2, \tilde{d}_2), \iota_2)$ twee completteringen van (X, d) zijn, dan bestaat er een unieke bijectieve isometrie $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ met $\iota_2 = g \circ \iota_1$.

Bewijs. Wegens de eigenschap van de complettering voor \tilde{X}_1 respectievelijk \tilde{X}_2 is er een unieke isometrie $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ die voldoet aan $\iota_2 = g \circ \iota_1$. We moeten nog bewijzen dat g een bijectieve isometrie is. Hiertoe merken we op dat er wegens de eigenschap van de complettering voor \tilde{X}_2 een unieke isometrie $h: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ is die voldoet aan $\iota_1 = h \circ \iota_2$. Hieruit volgt $\iota_1 = h \circ (g \circ \iota_1) = (h \circ g) \circ \iota_1$. De identiteit op \tilde{X}_1 is echter ook een isometrie $k: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$ met $\iota_1 = k \circ \iota_1$; per aanname is $h \circ g$ dus de identiteit op \tilde{X}_1 . Net zo is $g \circ h$ de identiteit op \tilde{X}_2 . We concluderen dat $g: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ een bijectieve isometrie is. \square

Propositie 7.2. *Elke metrische ruimte (X, d) heeft een completering (\tilde{X}, \tilde{d}) .*

Bewijs (schets). Zij R de verzameling van alle Cauchyrijen in X . We definiëren eerst een equivalentierelatie op R . Twee Cauchyrijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ noemen we *equivalent* (notatie: $(x_n)_{n \geq 0} \sim (y_n)_{n \geq 0}$) als $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$, d.w.z. als er voor elke $\epsilon > 0$ een $N > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x_n, y_n) < \epsilon$. Het is eenvoudig na te gaan dat \sim inderdaad een equivalentierelatie is.

We schrijven \tilde{X} voor de quotiëntverzameling R/\sim . De equivalentieklasse van een Cauchyrij $(x_n)_{n \geq 0}$ noteren we met $[(x_n)_{n \geq 0}]$. We definiëren een metriek \tilde{d} op \tilde{X} door

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}] \text{ en } \tilde{y} = [(y_n)_{n \geq 0}].$$

Men kan nagaan dat de limiet bestaat, niet afhangt van de gekozen representanten van de klassen \tilde{x} en \tilde{y} , en inderdaad een metriek op \tilde{X} definieert. We definiëren $\iota: X \rightarrow \tilde{X}$ als volgt: voor $x \in X$ is $\iota(x)$ de klasse van de constante rij $(x_n)_{n \geq 0}$ met $x_n = x$ voor alle $n \geq 0$. Dan is ι duidelijk een isometrie.

Zij (Y, d_Y) een volledige metrische ruimte, en zij $f: (X, d) \rightarrow (Y, d_Y)$ een isometrie. Dan definiëren we

$$\begin{aligned} g: (\tilde{X}, \tilde{d}) &\longrightarrow (Y, d_Y) \\ \tilde{x} &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}]. \end{aligned}$$

Merk op dat g een welgedefinieerde afbeelding is, aangezien de rechterkant niet afhangt van de keuze van een representant $(x_n)_{n \geq 0}$ voor de equivalentieklasse \tilde{x} . Verder is g een isometrie omdat

$$\begin{aligned} d_Y(g(\tilde{x}), g(\tilde{y})) &= d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)\right) \\ &= d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n), f(y_n))\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \\ &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Voor alle $x \in X$ geldt

$$g(\iota(x)) = g([(x)_{n \geq 0}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x),$$

dus $g \circ \iota = f$. We moeten nagaan dat g de *unieke* voortzetting van f tot een isometrie $\tilde{X} \rightarrow Y$ is. Hiervoor merken we op dat

$$\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n \geq 0}],$$

en dus, als $h: \tilde{X} \rightarrow Y$ een isometrie is met $h \circ \iota = f$,

$$\begin{aligned} h(\tilde{x}) &= h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(\iota(x_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ &= g(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Hieruit volgt de uniciteit van g . □

8. Topologische ruimten

Het gedrag van open en gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte met betrekking tot het nemen van verenigingen en doorsneden (propositie 2.2) blijkt zo fundamenteel te zijn dat deze eigenschappen als basis dienen voor de algemene definitie van topologische ruimten.

Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie \mathcal{T} van deelverzamelingen van X zodanig dat geldt

- (0) \emptyset en X zijn elementen van \mathcal{T} ;
- (1) elke vereniging van elementen van \mathcal{T} is een element van \mathcal{T} ;
- (2) elke eindige doorsnede van elementen van \mathcal{T} is een element van \mathcal{T} .

Een *topologische ruimte* is een paar (X, \mathcal{T}) met X een verzameling en \mathcal{T} een topologie op X . De elementen van \mathcal{T} heten *open deelverzamelingen* van (X, \mathcal{T}) . Een *gesloten deelverzameling* van (X, \mathcal{T}) is een deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Opmerking. Omdat de vereniging (resp. doorsnede) van de lege collectie deelverzamelingen van X gelijk is aan \emptyset (resp. X) volgt (0) in feite uit (1) en (2).

Opmerking. Uit de definitie volgen direct de eigenschappen van gesloten verzamelingen met betrekking tot verenigingen en doorsneden:

- (0) \emptyset en X zijn gesloten deelverzamelingen van (X, \mathcal{T}) ;
- (1) elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van (X, \mathcal{T}) is een gesloten deelverzameling van (X, \mathcal{T}) ;
- (2) elke eindige vereniging van gesloten deelverzamelingen van (X, \mathcal{T}) is een gesloten deelverzameling van (X, \mathcal{T}) .

Voorbeelden. (1) Voor elke verzameling X is $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ een topologie op X . Deze heet de *triviale* of *chaotische topologie*.

(2) Voor elke verzameling X is de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ (de collectie van alle deelverzamelingen van X) een topologie op X . Deze heet de *discrete topologie*.

(3) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij \mathcal{T}_d de verzameling van open deelverzamelingen van (X, d) (volgens de definitie van open deelverzamelingen in een metrische ruimte). Dan is \mathcal{T}_d een topologie op X wegens propositie 2.2.

(4) Zij \mathcal{T} de collectie deelverzamelingen van het complexe vlak \mathbf{C} gedefinieerd door

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \setminus U \text{ is eindig}\}.$$

Dan is $(\mathbf{C}, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.

(5) Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X . We definiëren

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Dit is een topologie op Y ; deze heet de *deelruimtetopologie* op Y , en (Y, \mathcal{T}_Y) heet een (*topologische*) *deelruimte* van (X, \mathcal{T}_X) .

Net als voor metrische ruimten kunnen we een topologie ook karakteriseren met behulp van de omgevingen.

Definitie. Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zij $x \in X$. Een *omgeving* van x in (X, \mathcal{T}) is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $U \in \mathcal{T}$ bestaat met $x \in U \subseteq N$.

Net als voor metrische ruimten is een open omgeving van x een open deelverzameling $U \subseteq X$ met $x \in U$.

Propositie 8.1. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte.*

- (1) *Voor alle $x \in X$, elke omgeving N van x en elke deelverzameling M van X met $M \supseteq N$ is M een omgeving van x .*
- (2) *Voor alle $x \in X$ is de doorsnede van twee omgevingen van x ook een omgeving van x .*
- (3) *Een verzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een omgeving van x is voor elke $x \in U$.*

Bewijs. Bewering (1) volgt direct uit de definitie. Stel N, N' zijn omgevingen van x . Dan zijn er open verzamelingen U, U' met $x \in U \subseteq N$ en $x \in U' \subseteq N'$. Dan is $U \cap U'$ een open verzameling met $x \in U \cap U' \subseteq N \cap N'$; dit geeft (2). Het is duidelijk dat elke open verzameling U een omgeving van elke $x \in U$ is. Omgekeerd: stel U is een omgeving van x voor elke $x \in U$. Voor elke $x \in U$ kunnen we een open verzameling U_x kiezen met $x \in U_x \subseteq U$. Nu geldt

$$U \subseteq \bigcup_{x \in U} U_x \subseteq U,$$

dus beide inclusies zijn gelijkheden; in het bijzonder is U een vereniging van open verzamelingen en dus open. □

De volgende propositie laat zien dat het begrip *omgeving* gebruikt kan worden om een alternatieve definitie van topologische ruimten te geven.

Propositie 8.2. Zij X een verzameling, en zij voor elke $x \in X$ een collectie \mathcal{N}_x van deelverzamelingen van X gegeven zodanig dat de volgende uitspraken gelden voor alle $x \in X$:

- (1) voor alle $N \in \mathcal{N}_x$ geldt $x \in N$;
- (2) als $N \in \mathcal{N}_x$ en $M \supseteq N$, dan geldt $M \in \mathcal{N}_x$;
- (3) als $N, N' \in \mathcal{N}_x$, dan geldt $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$;
- (4) er is een $U \in \mathcal{N}_x$ zodanig dat $U \in \mathcal{N}_y$ voor alle $y \in U$.

Dan is er een unieke topologie \mathcal{T} op X zodanig dat voor elke $x \in X$ de omgevingen van x in (X, \mathcal{T}) precies de elementen van \mathcal{N}_x zijn.

Bewijs (schets). We nemen voor \mathcal{T} de collectie van alle deelverzamelingen $U \subset X$ die voldoen aan $U \in \mathcal{N}_x$ voor alle $x \in U$; dit is de enige mogelijkheid wegens propositie 8.1(3). Het bewijs dat \mathcal{T} een topologie op X is, wordt aan de lezer overgelaten. Zij tot slot $x \in X$ en $N \subseteq X$. Als N een omgeving van x is, dan is er een open verzameling U met $x \in U \subseteq N$; per constructie geldt $U \in \mathcal{N}_x$, dus ook $N \in \mathcal{N}_x$ wegens (2). Omgekeerd: voor $N \in \mathcal{N}_x$ kan men nagaan dat de verzameling

$$U = \{y \in N \mid N \in \mathcal{N}_y\}$$

een open verzameling is met $x \in U \subseteq N$. □

Zoals we in voorbeeld (3) gezien hebben, is elke metrische ruimte op een natuurlijke manier op te vatten als topologische ruimte. Het is echter niet zo dat elke topologische ruimte op deze manier geconstrueerd kan worden. Een tegenvoorbeeld is $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$. Dan is $\{p\}$ niet gesloten. In een metrische ruimte zijn alle eindige verzamelingen echter gesloten, dus \mathcal{T} komt niet af van een metriek op X .

Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan zijn er voor twee punten $x \neq y$ altijd open omgevingen U van x en V van y te vinden met lege doorsnede. (Neem bijvoorbeeld $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waarbij $r = d(x, y)/2$.) Deze eigenschap is nuttig, maar geldt niet voor alle topologische ruimten. Voor de eerder genoemde topologische ruimte $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$ geldt zelfs dat elke open omgeving van q ook p bevat, dus zijn er zeker geen disjuncte open omgevingen van p en q .

Definitie. Een *Hausdorffruimte* is een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan zodanig dat $U \cap V = \emptyset$.

Voorbeeld. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij \mathcal{T}_d de topologie op X gedefinieerd door d . Dan is (X, \mathcal{T}_d) een Hausdorffruimte: als x, y twee verschillende punten van X zijn en $r = d(x, y)/2$, dan zijn $B_r(x)$ en $B_r(y)$ disjuncte open omgevingen van x en y .

Het is vaak zinvol om verschillende topologieën op dezelfde verzameling met elkaar te vergelijken.

Definitie. Zij X een verzameling, en zijn \mathcal{T} en \mathcal{T}' twee topologieën op X . We zeggen dat \mathcal{T}' *fijner* is dan \mathcal{T} , of dat \mathcal{T} *grover* is dan \mathcal{T}' , als geldt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

9. Continue afbeeldingen tussen topologische ruimten

In propositie 5.1 hebben we gezien dat het begrip van continuïteit voor afbeeldingen tussen metrische ruimten uitgedrukt kan worden in termen van open verzamelingen. Hierop baseren we de definitie van continue afbeeldingen tussen willekeurige topologische ruimten.

Definitie. Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten. Een *continue afbeelding* van (X, \mathcal{T}_X) naar (Y, \mathcal{T}_Y) is een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{T}_Y$ geldt $f^{-1}U \in \mathcal{T}_X$.

Voorbeelden. (1) Elke afbeelding van een verzameling met de discrete topologie naar een willekeurige topologische ruimte is continu.

(2) Elke afbeelding van een willekeurige topologische ruimte naar een verzameling met de triviale topologie is continu.

(3) Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten, en zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding. Dan is f continu als afbeelding van metrische ruimten dan en slechts dan als f continu is als afbeelding van topologische ruimten van (X, \mathcal{T}_{d_X}) naar (Y, \mathcal{T}_{d_Y}) .

(4) Neem $X = \mathbf{C}$ en zij $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \setminus U \text{ is eindig}\}$. Dan geldt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$, dus de identieke afbeelding op \mathbf{C} definieert een continue afbeelding $(\mathbf{C}, \mathcal{T}_d) \rightarrow (\mathbf{C}, \mathcal{T})$.

(5) Zijn \mathcal{T} en \mathcal{T}' twee topologieën op een verzameling X . Dan is de identiteit op X een continue afbeelding van (X, \mathcal{T}') naar (X, \mathcal{T}) dan en slechts dan als \mathcal{T}' fijner is dan \mathcal{T} .

10. Homeomorfismen

We voeren nu een begrip in dat zegt wanneer twee topologische ruimten “topologisch hetzelfde” zijn.

Definitie. Een *homeomorfisme* tussen topologische ruimten X en Y is een continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ met de eigenschap dat er een continue afbeelding $g: Y \rightarrow X$ bestaat zodanig dat $g \circ f$ de identiteit op X is en $f \circ g$ de identiteit op Y is.

Propositie 10.1. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) f is een homeomorfisme;
- (2) f is bijectief, continu en open;
- (3) f is bijectief, continu en gesloten.

Bewijs. Opgave. □

Voorbeelden. (1) Zijn (X, d) en (Y, d) metrische ruimten, en zij $f: X \rightarrow Y$ een bijectieve isometrie. Vatten we X en Y op als topologische ruimten, dan is f een homeomorfisme.

(2) De afbeelding

$$\begin{aligned} (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \tan x \end{aligned}$$

is een homeomorfisme met inverse $y \mapsto \arctan y$.

(3) De afbeelding van de open eenheidsschijf naar \mathbf{R}^2 die in poolcoördinaten gegeven wordt door $(r, \theta) \mapsto (r/(1-r), \theta)$ is een homeomorfisme met inverse $(u, \theta) \mapsto (u/(1+u), \theta)$.

(4) Een koffiekop en een donut zijn homeomorf.

11. Bases en de producttopologie

Om de producttopologie in te voeren, hebben we eerst de volgende definities nodig.

Definitie. Een *basis* van een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) is een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat elke open verzameling van X een vereniging van elementen van \mathcal{B} is. Een *subbasis* van (X, \mathcal{T}) is een deelverzameling $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat de collectie van eindige doorsneden van elementen van \mathcal{S} een basis van \mathcal{T} is.

Gegeven een willekeurige collectie \mathcal{S} van deelverzamelingen van X is er een unieke topologie op X waarvoor \mathcal{S} een subbasis is.

Voorbeeld. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij \mathcal{T}_d de door d gedefinieerde topologie op X . Dan is de collectie

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$$

van alle open ballen in (X, d) wegens propositie 2.1 een basis voor \mathcal{T}_d .

We kunnen op het product van twee metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) een “productmetriek” definiëren. Net zo kunnen we op het product van twee topologische ruimten (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) een *producttopologie* definiëren. Dit is de grofste topologie op $X \times Y$ zodanig dat de projectieafbeeldingen $X \times Y \rightarrow X$ en $X \times Y \rightarrow Y$ continu zijn.

Definitie. De *producttopologie* op $X \times Y$ is de topologie \mathcal{T} zodanig dat de verzameling

$$\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ open}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ open}\}$$

een subbasis voor \mathcal{T} is.

Propositie 11.1. *Zijn X en Y topologische ruimten, en zijn $p: X \times Y \rightarrow X$ en $q: X \times Y \rightarrow Y$ de projectieafbeeldingen. Dan bestaat er voor elke topologische*

ruimte Z en elk tweetal continue afbeeldingen $g: Z \rightarrow X$ en $h: Z \rightarrow Y$ een unieke continue afbeelding $f: Z \rightarrow X \times Y$ die voldoet aan $p \circ f = g$ en $q \circ f = h$.

Bewijs. Op het niveau van verzamelingen is de afbeelding $f: Z \rightarrow X \times Y$ gedefinieerd door $f(z) = (g(z), h(z))$ de unieke afbeelding met de gewenste eigenschap. We moeten dus nagaan dat f continu is; zie hiervoor opgave 61. \square

Voorbeeld. De producttopologie op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ is gelijk aan de euclidische topologie op \mathbf{R}^2 ; zie opgave 58.

De definitie van de producttopologie is zonder problemen te generaliseren naar producten van willekeurig veel topologische ruimten.

Definitie. Zij I een verzameling, zij voor elke $i \in I$ een topologische ruimte X_i gegeven, zij X de productverzameling $\prod_{i \in I} X_i$, en zij $p_i: X \rightarrow X_i$ de i -de projectieafbeelding. De *producttopologie* op X is de topologie \mathcal{T} zodanig dat de verzameling

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}U \mid i \in I, U \subseteq X_i \text{ open}\}$$

een subbasis voor \mathcal{T} is.

Evenals in het eindige geval is de producttopologie volgt uit de definitie dat \mathcal{T} de grofste topologie op X is waarvoor alle projecties $X \rightarrow X_i$ continu zijn.

12. Compactheid

Een fundamentele eigenschap van de reële getallen is het volgende feit, dat samenhangt met de volledigheid van \mathbf{R} .

Stelling 12.1 (Bolzano–Weierstraß). *Elke begrensde rij in \mathbf{R} heeft een convergente deelrij.*

Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie. Een metrische ruimte (X, d) is *rijcompact* als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

Stelling 12.2 (Heine–Borel). *Zij X een deelverzameling van \mathbf{R} . Dan is X rijcompact dan en slechts dan als X gesloten en begrensd is.*

We zullen deze stelling hieronder als gevolg van een algemenere stelling afleiden. Daarnaast willen we de gesloten en begrensde deelverzamelingen van \mathbf{R} karakteriseren op een manier waarin alleen de topologie en niet de metriek tot uitdrukking komt.

Definitie. Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. Een *open overdekking* van X is een deelverzameling \mathcal{U} van \mathcal{T} waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Definitie. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) heet *compact* als er voor elke open overdekking \mathcal{U} van X een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ bestaat waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.

De definitie van compactheid wordt vaak geformuleerd als “elke open overdekking heeft een eindige deelloverdekking”.

Voorbeelden. (1) Elke eindige topologische ruimte X is compact. Dit volgt direct uit het feit dat X maar eindig veel open verzamelingen heeft.

(2) De topologische ruimte \mathbf{R} is niet compact. Bekijk bijvoorbeeld de open overdekking $\mathcal{U} = \{B_1(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ van \mathbf{R} . De vereniging van eindig veel elementen van \mathcal{U} is begrensd, en is dus niet gelijk aan \mathbf{R} ; dit betekent dat \mathcal{U} geen eindige deelloverdekking heeft.

Het begrip compactheid is vaak nuttig om toe te passen op deelruimten.

Propositie 12.3. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) S (gezien als topologische deelruimte van X) is compact;
- (2) voor elke deelverzameling \mathcal{U} van \mathcal{T} met $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ bestaat er een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ waarvoor geldt $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.

Bewijs. Dit is af te leiden uit het feit dat de open deelverzamelingen van S precies de verzamelingen van de vorm $U \cap S$ zijn met U een open deelverzameling van X . De details worden als opgave aan de lezer overgelaten. \square

We noemen een verzameling S als in de bovenstaande propositie een *compacte deelverzameling* van X . Een verzameling \mathcal{U} als in de propositie heet ook wel een *open overdekking* van S (door open verzamelingen van X).

Propositie 12.4. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zij Y een topologische deelruimte van X .*

- (a) *Als X compact is en Y gesloten is in X , dan is Y compact.*
- (b) *Als X een Hausdorffruimte is en Y compact is, dan is Y gesloten in X .*

Bewijs. (a) Zij \mathcal{U} een overdekking van Y door open verzamelingen van X . Omdat Y gesloten is in X , is $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ een open overdekking van X . Wegens de compactheid van X heeft deze open overdekking een eindige deelloverdekking \mathcal{U}' . De doorsnede $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ is nu een eindige deelverzameling van \mathcal{U} die Y overdekt.

(b) We bewijzen dat $X \setminus Y$ open is. Zij $x \in X \setminus Y$. Omdat X een Hausdorffruimte is, bestaan er voor alle $y \in Y$ open verzamelingen $U_y, V_y \subseteq X$ zodanig dat $x \in U_y$, $y \in V_y$ en $U_y \cap V_y = \emptyset$. De verzameling $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in Y\}$ is een overdekking van Y met open deelverzamelingen van X . Wegens de compactheid van Y is er een eindige deelloverdekking $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$; deze heeft de vorm $\{V_y \mid y \in S\}$ voor een eindige deelverzameling $S \subseteq Y$. Bekijk nu de open verzameling $U = \bigcap_{y \in S} U_y$. Deze U heeft lege doorsnede met V_y voor elke $y \in S$, en dus geldt $U \cap Y = \emptyset$. Hieruit volgt dat U een open omgeving van x is die binnen $X \setminus Y$ ligt. \square

Een nuttige eigenschap van compacte ruimten is dat het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding weer compact is.

Propositie 12.5. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zij C een compacte deelverzameling van X . Dan is $f(C)$ compact.*

Bewijs. We mogen aannemen dat geldt $C = X$ en $f(C) = Y$. Zij \mathcal{V} een open overdekking van Y , en zij $\mathcal{U} = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\}$. Dan is \mathcal{U} een open overdekking van X . Wegens de compactheid van X is er een eindige deelopoverdekking $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Deze is van de vorm $\mathcal{U}' = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}'\}$ voor een eindige deelverzameling $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$. Als $x \in X$ bevat is in $f^{-1}V$, dan is $f(x)$ bevat in $f(f^{-1}V) \subseteq V$. Hieruit volgt dat \mathcal{V}' een overdekking van Y is. \square

Definitie. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ tussen topologische ruimten heet *open* als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ de verzameling $f(U)$ open is in Y . Net zo heet een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ *gesloten* als voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ de verzameling $f(F)$ gesloten is in Y .

Gevolg 12.6. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y . Dan is f gesloten.*

Bewijs. Zij $F \subseteq X$ een gesloten deelverzameling. Wegens propositie 12.4(a) is F compact. Uit propositie 12.5 volgt dat $f(F)$ compact is. Tot slot volgt uit propositie 12.4(b) dat $f(F)$ gesloten is in Y . \square

Gevolg 12.7. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een bijectieve continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y . Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Wegens propositie 10.1 volstaat het om te bewijzen dat f gesloten is. Dit hebben we echter gezien in gevolg 12.6. \square

De volgende herformulering van compactheid is vaak nuttig.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X de *eindige-doorsnijdingseigenschap* heeft als er voor elke collectie \mathcal{F} van gesloten verzamelingen met $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ een eindige deelverzameling $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ bestaat zodanig dat $\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F = \emptyset$.

Propositie 12.8. *Zij X een topologische ruimte. Dan is X compact dan en slechts dan als X de eindige-doorsnijdingseigenschap heeft.*

Bewijs. Dit volgt uit de definitie door het nemen van complementen. \square

Het volgende feit is een bijzonder nuttige eigenschap van compacte ruimten.

Stelling 12.9. *Zij X een niet-lege compacte topologische ruimte, en zij $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ een continue functie. Dan neemt f een maximum en minimum aan op X .*

(Oftewel: er bestaan $a, b \in X$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.)

Bewijs. Omdat X compact is, is $f(X)$ compact wegens propositie 12.5. Uit de stelling van Heine–Borel volgt nu dat $f(X)$ gesloten en begrensd is. Omdat X niet-lege is, geldt hetzelfde voor $f(X)$; dit impliceert dat $f(X)$ een minimaal en een maximaal element heeft. \square

We gaan terug naar metrische ruimten.

Zij (X, d) een metrische ruimte. De *diameter* van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is gedefinieerd als

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

(Zie ook opgave 7.)

Stelling 12.10 (Cantor). *Zij X een volledige metrische ruimte. Stel dat $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ gesloten en niet-lege verzamelingen zijn zodanig dat $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Dan bevat $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ precies één punt.*

Bewijs (schets). We kiezen een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X zodanig dat $x_n \in F_n$ voor alle n . Dan is $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij en heeft wegens de volledigheid van X een limiet x . Deze limiet ligt in $F = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ omdat de F_n gesloten zijn. Tot slot is het eenvoudig na te gaan dat $\text{diam}(F) = 0$, zodat F niet meer dan één punt kan bevatten. \square

Definitie. Zij X een metrische ruimte. We zeggen dat X *totaal begrensd* is als er voor elke $\epsilon > 0$ een eindige overdekking van X bestaat met open ballen van straal ϵ .

De volgende stelling kan gezien worden als een generalisatie van de stelling van Heine–Borel (gebruik dat gesloten en begrensde deelverzamelingen van \mathbf{R} hetzelfde zijn als volledige en totaal begrensde deelverzamelingen van \mathbf{R}).

Stelling 12.11. *Zij (X, d) een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is compact;
- (2) X is rijcompact;
- (3) X is volledig en totaal begrensd.

Bewijs. We bewijzen de implicaties $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$.

$(1) \implies (2)$ Stel X is compact. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X . We willen een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ construeren. Voor alle $n \geq 0$ definiëren we F_n als de afsluiting van de verzameling $\{x_m \mid m \geq n\}$. Dan is de doorsnede van eindig veel F_n niet-leeg. Wegens de eindige-doorsnijdingseigenschap is de doorsnede van alle F_n ook niet-leeg. We kiezen een punt $x \in \bigcap_{n \geq 0} F_n$. Zij $n_0 = 0$. Voor alle $k \geq 1$ is er wegens het feit dat x in $F_{n_{k-1}+1}$ ligt een $n_k > n_{k-1}$ zodanig dat $d(x_{n_k}, x) < 2^{-k}$. De rij $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergeert nu naar x .

$(2) \implies (3)$ Stel X is rijcompact. Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in X . Wegens de rijcompactheid heeft $(x_n)_{n \geq 0}$ een convergente deelrij. Zij x de limiet van deze deelrij. Dan convergeert ook de hele rij $(x_n)_{n \geq 0}$ naar x . Hieruit volgt dat X volledig is. Stel nu dat X niet totaal begrensd is. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat X niet overdekt kan worden door eindig veel ballen van straal ϵ . We willen een rij construeren zonder convergente deelrij. Kies $x_0 \in X$. Dan is $B_\epsilon(x_0)$ niet gelijk

aan X , dus er bestaat $x_1 \in X \setminus B_\epsilon(x_0)$. Nu is ook $B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1)$ niet gelijk aan X , dus er bestaat $x_2 \in X \setminus (B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1))$. Inductief construeren we zo een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ met de eigenschap dat $x_{n+1} \notin B_\epsilon(x_0) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_n)$. Hieruit volgt dat $(x_n)_{n \geq 0}$ geen deelrij heeft die een Cauchyrij is (twee verschillende punten liggen altijd minstens ϵ van elkaar vandaan), tegenspraak. Dus X is totaal begrensd.

(3) \implies (1) Stel X is volledig en totaal begrensd. Zij \mathcal{U} een open overdekking van X . Stel dat \mathcal{U} geen eindige deelloverdekking heeft. Er bestaat daarentegen wel een eindige overdekking van X met open ballen van straal 1. Omdat \mathcal{U} geen eindige deelloverdekking heeft, is er dus een $x_0 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in \mathcal{U} . Wel kan X , en dus ook $B_1(x_0)$, overdekt worden met eindig veel open ballen van straal $1/2$ in X ; er is dus een $x_1 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0) \cap B_{1/2}(x_1)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in \mathcal{U} . Zo verdergaand construeren we een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X zodanig dat de open verzameling $V_n = B_1(x_0) \cap \dots \cap B_{2^{-n}}(x_n)$ in X niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in \mathcal{U} . Voor $n \geq 0$ definiëren we F_n als de afsluiting van V_n . Dan is de diameter van F_n ten hoogste 2^{1-n} . Omdat X volledig is, bevat $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ wegens stelling 12.10 precies één punt x . Kies $U_0 \in \mathcal{U}$ met $x \in U_0$. Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ met $B_\epsilon(x) \subseteq U_0$. Zij $n \geq 0$ zodanig dat $2^{1-n} < \epsilon$, dan geldt $F_n \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U_0$. In het bijzonder is $\{U_0\}$ een eindige overdekking van V_n door open verzamelingen in \mathcal{U} , een tegenspraak. \square

13. Lokaal compacte ruimten en compactificaties

Definitie. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) is *lokaal compact* als er voor elke $x \in X$ een (niet noodzakelijk open) omgeving N van x bestaat zodanig dat N compact is.

Voorbeelden. Compacte ruimten, \mathbf{R}^n , discrete ruimten.

Een veel gebruikte techniek is het *compactificeren* van topologische ruimten.

Definitie. Zij (X, \mathcal{T}) een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van (X, \mathcal{T}) is een compacte Hausdorffruimte $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ samen met een continue afbeelding $\iota: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ zodanig dat $\iota: X \rightarrow \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_\infty \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

Stelling 13.1. *Zij (X, \mathcal{T}) een lokaal compacte Hausdorffruimte. Dan bestaat er een eenpuntscompactificatie $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ van (X, \mathcal{T}) , en deze is op homeomorfie na uniek bepaald.*

Bewijs. Zij X_∞ de verzameling $X \sqcup \{\infty\}$. We definiëren een topologie \mathcal{T}_∞ op X_∞ door

$$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{X_\infty \setminus K \mid K \subset X \text{ is compact}\}.$$

De collectie van complementen van verzamelingen in \mathcal{T}_∞ is

$$\mathcal{F}_\infty = \{F \cup \{\infty\} \mid F \subseteq X \text{ is gesloten}\} \cup \{K \mid K \subset X \text{ is compact}\}.$$

We gaan na dat \mathcal{T}_∞ een topologie is door te bewijzen dat \mathcal{F}_∞ de eigenschappen van de collectie van gesloten verzamelingen heeft. Ten eerste is duidelijk dat geldt $\emptyset, X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$. Zijn $F, F' \in \mathcal{F}_\infty$. Als $\infty \in F \cup F'$, dan is $F \cup F'$ van de vorm $F'' \cup \{\infty\}$ met F'' gesloten (compacte deelverzamelingen van X zijn gesloten omdat X een Hausdorffruimte is). Anders is $F \cup F'$ een vereniging van twee compacte verzamelingen en is dus weer compact.

Zij \mathcal{G} een willekeurige deelverzameling van \mathcal{F}_∞ . Als $\infty \in F$ voor alle $F \in \mathcal{G}$, dan is $\bigcap_{F \in \mathcal{G}} F$ van de vorm $F \cup \{\infty\}$ met F gesloten in X . Anders bevat \mathcal{G} een compacte deelverzameling K van X , en geldt

$$\bigcap_{F \in \mathcal{G}} F = \bigcap_{F \in \mathcal{G}} (F \cap K)$$

De verzamelingen rechts is een doorsnede van gesloten deelverzamelingen van de compacte ruimte K , is dus zelf gesloten in K en is dus een compacte deelverzameling van X .

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ compact is. Zij \mathcal{U} een open overdekking van X_∞ . Dan is er minstens een $U \in \mathcal{U}$ met $\infty \in U$. Zij $K = X_\infty \setminus U$; dan is $X = U \cup K$ en het volstaat te bewijzen dat K een eindige overdekking door elementen van \mathcal{U} heeft. Dit volgt echter uit het feit dat $U \cap X$ open is in X voor elke $U \in \mathcal{T}_\infty$ en K compact is.

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ een Hausdorffruimte is. Zijn $x, y \in X_\infty$ verschillend. Als $x, y \neq \infty$, dan bestaan er disjuncte open omgevingen van x en y in X (en dus in X_∞) omdat X een Hausdorffruimte is. We mogen dus aannemen dat $x \in X$ en $y = \infty$. Omdat X lokaal compact is, bestaan er $U \subseteq X$ open en $K \subseteq X$ compact met $x \in U \subseteq K$. Verder is $X_\infty \setminus K$ een open omgeving van ∞ in X_∞ . Hiermee zijn U en $X_\infty \setminus K$ disjuncte open omgevingen van x en ∞ in X_∞ .

De natuurlijke inbedding $\iota: X \rightarrow X_\infty$ is een homeomorfisme naar $\iota(X)$ omdat $\{U \cap X \mid U \in \mathcal{T}_\infty\} = \mathcal{T}$.

Om te bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ op homeomorfismen na uniek is, nemen we aan dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een andere eenpuntscompactificatie is. Dan kunnen we een voor de hand liggende bijjectie $f: X'_\infty \rightarrow X_\infty$ construeren. We merken nu op dat de topologie \mathcal{T}_∞ “minimaal” is in de zin dat voor alle $U \in \mathcal{T}_\infty$ de eis dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een compacte Hausdorffruimte is, impliceert dat $f^{-1}U$ open is. Dit betekent dat f een continue afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffruimte is. Wegens gevolg 12.7 is f een homeomorfisme. \square

14. De stelling van Tichonov

Een van de belangrijkste stellingen uit de topologie is de stelling van Tichonov (alternatieve transliteraties: Tikhonov, Tichonow, Tychonoff enz.).

Stelling 14.1 (Tichonov). *Elk product van compacte topologische ruimten is compact.*

De stelling in deze algemene vorm is equivalent met het keuzeaxioma. We zullen de stelling hier alleen voor een product van eindig veel compacte ruimten

bewijzen. Door inductie volgt deze versie uit de onderstaande stelling voor een product van twee compacte ruimten.

Stelling 14.2. *Zijn X en Y twee compacte topologische ruimten. Dan is $X \times Y$ compact.*

Bewijs. Zij \mathcal{W} een open overdekking van $X \times Y$. Laten we een deelverzameling $S \subseteq X \times Y$ klein noemen als S overdekt kan worden door eindig veel verzamelingen in \mathcal{W} . We moeten dus bewijzen dat $X \times Y$ klein is. We merken eerst op dat er voor elke $(a, b) \in X \times Y$ een $W \in \mathcal{W}$ is met $(a, b) \in W$, en dat er open verzamelingen $U_{a,b} \subseteq X$ en $V_{a,b} \subseteq Y$ zijn met $(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq W$. De verzamelingen $U_{a,b} \times V_{a,b}$ met $(a, b) \in X \times Y$ vormen dus een open overdekking van $X \times Y$ door kleine deelverzamelingen.

We beweren nu dat er voor elke $a \in X$ een open omgeving U_a van a bestaat zodanig dat $U_a \times Y$ klein is. De $V_{a,b}$ voor $b \in Y$ overdekken namelijk Y , dus wegens de compactheid van Y is er een eindige deelverzameling $T_a \subseteq Y$ zodanig dat $\bigcup_{b \in T_a} V_{a,b} = Y$. Zij $U_a = \bigcap_{b \in T_a} U_{a,b}$; dan geldt $U_a \times Y \subseteq \bigcup_{b \in T_a} U_{a,b} \times V_{a,b}$, dus $U_a \times Y$ is klein.

De open verzamelingen U_a met $a \in X$ overdekken X . Omdat X compact is, is er een eindige deelverzameling $S \subseteq X$ zodanig dat $\bigcup_{a \in S} U_a = X$. We merken nu op dat $X \times Y = \bigcup_{a \in S} U_a \times Y$, dus $X \times Y$ is klein. \square

15. Wegen

Definitie. Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. Een *weg* of *pad* in X is een continue afbeelding

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow X.$$

Als $x = \gamma(0)$ en $y = \gamma(1)$, dan noemen we γ een *weg* (of *pad*) van x naar y .

De volgende begrippen zijn erg nuttig bij het redeneren over wegen.

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg. De *omkering* van γ is de weg

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(1 - t). \end{aligned}$$

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ twee wegen met de eigenschap dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. De *aaneenschakeling* van γ_1 en γ_2 is de weg

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \leq t \leq 1/2; \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{als } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(Merk op dat $\gamma_1 \odot \gamma_2$ goed gedefinieerd is dankzij de aanname dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Zie opgave 80 voor het bewijs dat $\gamma_1 \odot \gamma_2$ continu is.)

Gegeven een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) schrijven we $x \sim_p y$ als er een weg van x naar y bestaat. Met behulp de bovenstaande definities is eenvoudig in te zien dat \sim_p een equivalentierelatie op X is.

16. Samenhang en wegsamenhang

Het is bekend (zie opgave 3) dat in de metrische ruimte \mathbf{R} de enige deelverzamelingen die zowel open als gesloten zijn, de lege verzameling en \mathbf{R} zelf zijn. Dit is een eigenschap die bekendstaat als *samenhang* (of *samenhangendheid*).

Definitie. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) is *samenhangend* als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.

In het bijzonder wordt \emptyset niet beschouwd als samenhangend. Voor elke topologische ruimte X zijn \emptyset en X zowel open als gesloten, dus X is samenhangend dan en slechts dan als X niet-leeg is en \emptyset en X de enige deelverzamelingen van X zijn die zowel open als gesloten zijn.

Opmerking. In het boek (Runde, Definition 3.4.7) wordt de lege verzameling wel als samenhangend beschouwd, maar dit is niet de algemeen gangbare conventie.

Voorbeeld. Een discrete ruimte X is samenhangend dan en slechts dan als X uit precies één punt bestaat.

Propositie 16.1. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is samenhangend;
- (2) X is niet leeg, en als U en V open verzamelingen zijn waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$, dan geldt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$;
- (3) er bestaan precies twee continue afbeeldingen van X naar $\{0, 1\}$ (met de discrete topologie), namelijk de constante functie 0 en de constante functie 1.

Bewijs. De equivalentie van (1) en (2) is in te zien door op te merken dat verzamelingen U en V als in (2) zowel open als gesloten zijn, aangezien ze elkaars complement zijn. De equivalentie van (1) en (3) is opgave 48. \square

Voorbeeld. Het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ is samenhangend. Wegens de tussenwaardstelling is elke continue functie $f: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ namelijk constant, dus er bestaan precies twee continue afbeeldingen van $[0, 1]$ naar $\{0, 1\}$.

Propositie 16.2. *Het beeld van een samenhangende ruimte onder een continue afbeelding is samenhangend.*

Bewijs. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding. Stel dat U en V open deelverzamelingen van $f(X)$ zijn zodanig dat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = f(X)$. Zij $U' = f^{-1}U$ en $V' = f^{-1}V$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = X$. Omdat X samenhangend is, geldt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$. We concluderen dat $f(X)$ samenhangend is. \square

Een definitie van samenhang die op het eerste gezicht intuïtiever lijkt, is als volgt.

Definitie. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) is *wegsamenhangend* als X niet leeg is en er voor alle $x, y \in X$ een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y bestaat.

Propositie 16.3. *Het beeld van een wegsamenhangende ruimte onder een continue afbeelding is wegsamenhangend.*

Bewijs. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding. Gegeven twee punten in $f(X)$, die we kunnen schrijven als $f(x)$ en $f(y)$ met $x, y \in X$, bestaat er wegens de wegsamenhang van X een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y . De afbeelding $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow f(X)$ is nu een weg van $f(x)$ naar $f(y)$. We concluderen dat $f(X)$ wegsamenhangend is. \square

Propositie 16.4. *Elke wegsamenhangende topologische ruimte is samenhangend.*

Bewijs. Stel X is een wegsamenhangende ruimte die niet samenhangend is. Dan kunnen we X schrijven als disjuncte vereniging $U \sqcup V$ met U, V open en verschillend van \emptyset en X . De functie

$$f: X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \in U, \\ 1 & \text{als } x \in V \end{cases}$$

is continu. Kies $x \in U$ en $y \in V$; dan bestaat er een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ van x naar y . De functie $g = f \circ \gamma$ is nu echter een continue functie met $g(0) = f(x) = 0$ en $g(1) = f(y) = 1$, hetgeen de samenhang van $[0, 1]$ tegenspreekt. \square

Samenhang en wegsamenhang zijn niet equivalent. Hieronder geven we een voorbeeld van een topologische ruimte X die wel samenhangend, maar niet wegsamenhangend is. Om te laten zien dat X samenhangend is, hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 16.5. *Zij X een topologische ruimte, en zij Y een dichte deelverzameling van X die samenhangend is. Dan is X samenhangend.*

Bewijs. Stel U, V zijn open deelverzamelingen van X zodanig dat $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$. We schrijven $U' = U \cap Y$ en $V' = V \cap Y$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = Y$. Uit de aanname dat Y samenhangend is, volgt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Wegens symmetrie mogen we aannemen $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $Y \subseteq U$. Omdat Y dicht is, impliceert dit $\bar{U} = X$. Aangezien U gesloten is, concluderen we $U = X$. \square

Voorbeeld. Zij Y de verzameling $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ in \mathbf{R}^2 , en zij X de afsluiting van Y in \mathbf{R}^2 . Dan is Y dicht in X , en (als beeld van een continue afbeelding $(0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2$) samenhangend. Wegens propositie 16.5 is ook X samenhangend.

We beweren dat X niet wegsamenhangend is. Zij Z de gesloten deelverzameling $\{0\} \times [-1, 1] = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ van X . Stel dat er een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ bestaat met $\gamma(0) \in Z$ en $\gamma(1) \in Y$. De deelverzameling $\gamma^{-1}Z$ van $[0, 1]$ is gesloten en niet-leeg, en bevat dus een maximaal element a . Uit $\gamma(1) \in Y$ volgt $a < 1$. Door γ te beperken tot $[a, 1]$ krijgen we een continue functie $\gamma: [a, 1] \rightarrow X$ met $\gamma(a) \in Z$ en $\gamma((a, 1]) \subseteq Y$. Het beeld $\gamma([a, 1])$ is compact en dus gesloten en begrensd in \mathbf{R}^2 . Hieruit is af te leiden dat $\gamma([a, 1])$ de verzameling Z bevat. Er geldt echter $\gamma([a, 1]) \cap Z = \{\gamma(a)\}$, tegenspraak. \square

17. (Weg)samenhangscomponenten

We gaan nu twee manieren bekijken waarop een topologische ruimte op een natuurlijke manier “opgedeeld kan worden”: in samenhangscomponenten en in wegsamenhangscomponenten. We beginnen met wegsamenhangscomponenten, omdat deze intuïtief makkelijker te begrijpen zijn.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *wegsamenghangscomponent* van X is een equivalentieklasse voor de equivalentierelatie \sim_p op X .

Propositie 17.1. Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. Dan is X als verzameling de disjuncte vereniging van de wegsamenhangscomponenten van (X, \mathcal{T}) .

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat een verzameling door een equivalentierelatie opgedeeld wordt in een disjuncte vereniging van equivalentieklassen. \square

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De *wegsamenghangscomponent van x (in X)* is de equivalentieklasse van x met betrekking tot \sim_p .

Een wegsamenhangscomponent van X is hetzelfde als een maximale wegsamenhangende deelruimte van X , d.w.z. een wegsamenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere wegsamenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat. De wegsamenhangscomponent van x is de unieke wegsamenhangscomponent van X die x bevat, oftewel de maximale wegsamenhangende deelruimte van X die x bevat.

Voorbeeld. De wegsamenhangscomponenten in het eerdere voorbeeld zijn Y en Z .

We gaan nu in op de vraag voor welke topologische ruimten de begrippen samenhang en wegsamenhang hetzelfde zijn. We zullen later zien (in propositie 17.5) dat dit het geval is wanneer elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Hiervoor hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 17.2. Zij X een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Dan is elke wegsamenhangscomponent van X zowel open als gesloten.

Bewijs. Zij Y een wegsamenhangscomponent van X , en zij $y \in Y$. Per aanname is er een wegsamenhangende omgeving N van y in X . Omdat Y de wegsamenhangscomponent van y is, geldt $N \subseteq Y$. Elke $y \in Y$ heeft dus een omgeving die in Y bevat is, dus Y is open. Uit het feit dat Y het complement is van de vereniging van alle wegsamenhangscomponenten verschillend van X , en deze zelf open zijn, volgt dat Y gesloten is. \square

Een gerelateerde manier om een topologische ruimte in componenten op te delen, is in *samenhangscomponenten*. Deze blijken in veel gevallen hetzelfde te zijn als de wegsamenhangscomponenten. In het algemeen heeft een topologische ruimte X echter “meer” wegsamenhangscomponenten dan samenhangscomponenten, in de zin dat elke samenhangscomponent uit meerdere wegsamenhangscomponenten bestaat.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *samenhangscomponent* van X is een maximale samenhangende deelruimte van X , d.w.z. een samenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere samenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat.

Lemma 17.3. *Zij X een topologische ruimte, en zij \mathcal{S} een niet-lege collectie samenhangende deelruimten van X zodanig dat voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}$ geldt $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Dan is $Z = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}} Y$ samenhangend.*

Bewijs. Stel dat Z niet samenhangend is. Dan bestaat er een continue, niet-constante functie $f: Z \rightarrow \{0, 1\}$. Omdat elke $Y \in \mathcal{S}$ samenhangend is, is f op elke $Y \in \mathcal{S}$ constant. Kies $Y \in \mathcal{S}$ waarop f constant 0 is, en $Y' \in \mathcal{S}$ waarop f constant 1 is. Op de niet-lege doorsnede van Y en Y' is f dan zowel 0 als 1, tegenspraak. \square

Stelling 17.4. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte.*

- (a) *Als verzameling is X de disjuncte vereniging van de samenhangscomponenten van (X, \mathcal{T}) .*
- (b) *De samenhangscomponenten van (X, \mathcal{T}) zijn gesloten.*

Bewijs. Voor (a) moeten we laten zien dat elk punt $x \in X$ in precies één samenhangscomponent van (X, \mathcal{T}) ligt. Zij \mathcal{S}_x de collectie van alle samenhangende deelruimten $Y \subseteq X$ met $x \in Y$. Dan is \mathcal{S}_x niet-leeg (er geldt $\{x\} \in \mathcal{S}_x$), en voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}_x$ geldt $x \in Y \cap Y'$. Uit lemma 17.3 volgt dat de verzameling $X_x = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}_x} Y$ samenhangend is en dus het unieke maximale element van \mathcal{S}_x is. Dit impliceert dat X_x een samenhangscomponent van (X, \mathcal{T}) is. Er bestaat dus een samenhangscomponent van X waar x in ligt. Verder volgt uit lemma 17.3 dat de doorsnede van twee verschillende samenhangscomponenten leeg is. Dit betekent dat X_x de *unieke* samenhangscomponent van X is waar x in ligt.

We bewijzen nu (b). Zij Z een samenhangscomponent van X . We merken op dat Z dicht is in de afsluiting \bar{Z} van Z in X ; wegens propositie 16.5 is \bar{Z} ook samenhangend. Uit de maximaliteit van samenhangscomponenten volgt $\bar{Z} = Z$, dus Z is gesloten. \square

Opmerking. Het analogon van stelling 17.4(b) geldt niet voor wegsamenhangscomponenten: deze zijn niet automatisch gesloten.

Definitie. Zij X een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De *samenhangscomponent van x (in X)* is de unieke samenhangscomponent van X die x bevat.

Propositie 17.5. *Zij X een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft.*

- (a) *De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X .*
- (b) *X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.*

Bewijs. (a) Zij Y een wegsamenhangscomponent van X . Dan is Y samenhangend en dus bevat in een unieke samenhangscomponent Z van X . Wegens propositie 17.2 is Y open en gesloten in X , en dus ook in Z . Uit het feit dat Z samenhangend is en Y niet-leeg is, volgt $Y = Z$.

(b) Dit volgt direct uit (a). □

Verschillende interessante topologische ruimten hebben de eigenschap dat elke samenhangscomponent uit slechts één punt bestaat. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) heet *totaal onsamensamenhangend* als elke samenhangscomponent van (X, \mathcal{T}) uit slechts één punt bestaat, d.w.z. als voor alle $x \in X$ de samenhangscomponent van x gelijk is aan $\{x\}$.

Voorbeelden. (Zie ook opgave 92.)

- (1) Elke discrete topologische ruimte is totaal onsamensamenhangend.
- (2) De deelruimte \mathbf{Q} van \mathbf{R} is totaal onsamensamenhangend.
- (3) Het product van aftelbaar veel exemplaren van de discrete ruimte $\{0, 1\}$ is totaal onsamensamenhangend.

18. Lokale (weg)samenhang

De hierboven gegeven definities hebben ook “lokale analoga”.

Definitie. Een topologische ruimte X heet *lokaal samenhangend* (respectievelijk *lokaal wegsamenhangend*) als er voor elke $x \in X$ en elke omgeving N van x een samenhangende (respectievelijk wegsamenhangende) omgeving N' van x bestaat met $N' \subseteq N$.

(Met andere woorden: X is lokaal (weg)samenhangend als \mathcal{N}_x voor elke $x \in X$ een basis heeft die bestaat uit (weg)samenhangende verzamelingen; zie Runde, Definition 3.4.20.)

Gevolg 18.1. *Zij X een lokaal wegsamenhangende topologische ruimte.*

- (a) *De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X .*
- (b) *X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.*

Bewijs. Omdat X lokaal wegsamenhangend is, heeft elk punt van X een wegsamenhangende omgeving. Beide beweringen volgen nu uit propositie 17.5. □

Propositie 18.2. *Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte.*

- (a) *Elke open deelverzameling $U \subset X$ (voorzien van de deelruimtetopologie) is lokaal samenhangend.*
- (b) *Elke samenhangscomponent van X is open in X .*

Bewijs. (a) Zij $x \in U$, en zij N een omgeving van x in U . Omdat U open is in X , is N ook een omgeving van x in X . Aangezien X lokaal samenhangend is,

bestaat er een samenhangende omgeving N' van x in X met $N' \subseteq N$. Deze N' is tevens een samenhangende omgeving van x in U .

(b) Zij Y een samenhangscomponent van X . Omdat X lokaal samenhangend is, heeft elke $y \in Y$ een samenhangende omgeving N_y in X . Omdat Y een samenhangscomponent van X is, geldt $N_y \subseteq Y$. We zien dus dat Y de vereniging is van de verzamelingen N_y voor $y \in Y$. Hieruit volgt dat Y open is in X . \square

Propositie 18.3. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is lokaal samenhangend;
- (2) \mathcal{T} heeft een basis die bestaat uit samenhangende verzamelingen.

Bewijs. De implicatie (2) \implies (1) is eenvoudig na te gaan.

We bewijzen (1) \implies (2). Zij $x \in X$, en zij U een open omgeving van x . Wegens propositie 18.2(a) is U lokaal samenhangend. Zij V de samenhangscomponent van x in U . Dan is V open in U wegens propositie 18.2(b). Aangezien U open is in X , is V ook open in X , dus V is een samenhangende open omgeving van x in X met $V \subseteq U$. Hieruit volgt dat \mathcal{T} een basis heeft die bestaat uit samenhangende verzamelingen. \square

Propositie 18.4. *Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

- (1) X is lokaal wegsamenhangend;
- (2) \mathcal{T} heeft een basis die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen.

Bewijs. We bewijzen (1) \implies (2); het bewijs van de implicatie (2) \implies (1) wordt aan de lezer overgelaten. Stel dat X lokaal wegsamenhangend is. Zij U een open deelverzameling van X . Dan bestaat er voor elke $x \in U$ een wegsamenhangende open omgeving V_x van x die bevat is in U , en de open verzameling U is de vereniging van de wegsamenhangende deelverzamelingen V_x . Hieruit volgt dat \mathcal{T} een basis heeft die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen. \square

19. Homotopie en weghomotopie

Het begrip *homotopie* betekent intuïtief dat twee continue afbeeldingen $f, g: X \rightarrow Y$ “in elkaar vervormd kunnen worden”.

Definitie. Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zijn $f, g: X \rightarrow Y$ twee continue afbeeldingen. Een *homotopie* van f naar g is een continue afbeelding

$$F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

(waarbij $[0, 1] \times X$ voorzien is van de producttopologie) zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$F(0, x) = f(x) \quad \text{en} \quad F(1, x) = g(x).$$

We zeggen dat f en g *homotoop* zijn, notatie $f \sim g$, als er een homotopie van f naar g bestaat.

Propositie 19.1. *De homotopierelatie \sim op de verzameling van continue afbeeldingen $X \rightarrow Y$ is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Elke continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ is homotoop met zichzelf via de homotopie

$$F: [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

$$(t, x) \longmapsto f(x).$$

Dit betekent dat \sim reflexief is.

Als $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g is, dan is de afbeelding

$$G: [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

$$(t, x) \longmapsto F(1 - t, x)$$

een homotopie van g naar f . Dit betekent dat \sim symmetrisch is.

Zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g , en zij $G: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van g naar h . Dan is

$$H: [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

$$(t, x) \longmapsto \begin{cases} F(2t, x) & \text{als } t \in [0, 1/2], \\ G(2t - 1, x) & \text{als } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

een homotopie van f naar h . Dit betekent dat \sim transitief is. □

Voorbeelden. (1) De twee afbeeldingen $f, g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x, y) \quad \text{en} \quad g(x, y) = (0, 0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$F(t, (x, y)) = (1 - t)(x, y).$$

(2) Bekijk de eenheidscirkel

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

en de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De twee afbeeldingen $f, g: S^1 \rightarrow S^2$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (0, 0, 1) \quad \text{en} \quad g(x, y) = (x, y, 0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$F: [0, 1] \times S^1 \longrightarrow S^2$$

$$(t, (x, y)) \longmapsto (tx, ty, \sqrt{1 - t^2}).$$

Een belangrijk soort continue afbeeldingen zijn wegen $[0, 1] \rightarrow X$. Het hierboven gedefinieerde begrip homotopie is echter niet erg zinvol voor wegen. Als $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ namelijk een weg van x_0 naar x_1 is, dan is γ homotoop met de constante weg $s \mapsto x_0$ via de homotopie

$$F: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$(t, s) \longmapsto \gamma((1 - t)s).$$

Om deze reden voeren we een gerelateerde definitie in die geschikter is voor wegen in X .

Notatie. Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. We schrijven $P(X; x_0, x_1)$ voor de verzameling van alle wegen van x_0 naar x_1 .

Definitie. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen van x_0 naar x_1 . Een *weghomotopie* van γ naar γ' is een continue afbeelding

$$\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

zodanig dat voor alle $s, t \in [0, 1]$ geldt

$$\begin{aligned} \Gamma(0, s) &= \gamma(s), & \Gamma(1, s) &= \gamma'(s), \\ \Gamma(t, 0) &= x_0, & \Gamma(t, 1) &= x_1. \end{aligned}$$

We zeggen dat γ en γ' *weghomotoop* zijn, notatie $\gamma \simeq \gamma'$, als er een weghomotopie van γ naar γ' bestaat.

Propositie 19.2. *Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan is de weghomotopierelatie \simeq op de verzameling $P(X; x_0, x_1)$ een equivalentierelatie.*

Bewijs. Dit gaat op dezelfde manier als het bewijs van propositie 19.1. □

Lemma 19.3. *Zijn $x_0, x_1, x_2 \in X$ drie punten. Stel dat $\gamma_0, \gamma'_0 \in P(X; x_0, x_1)$ en $\gamma_1, \gamma'_1 \in P(X; x_1, x_2)$ wegen zijn zodanig dat $\gamma_0 \simeq \gamma'_0$ en $\gamma_1 \simeq \gamma'_1$. Dan zijn de aaneenschakelingen $\gamma_0 \odot \gamma_1$ en $\gamma'_0 \odot \gamma'_1$ in $P(X; x_0, x_2)$ weghomotoop.*

Bewijs. Zij Γ_0 een weghomotopie van γ_0 naar γ'_0 , en zij Γ_1 een weghomotopie van γ_1 naar γ'_1 . We bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} \Gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \begin{cases} \Gamma_0(t, 2s) & \text{als } s \in [0, 1/2], \\ \Gamma_1(t, 2s - 1) & \text{als } s \in [1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Dan is Γ continu, en door $t = 0$ en $t = 1$ in te vullen, zien we dat Γ een weghomotopie van $\gamma_0 \odot \gamma_1$ naar $\gamma'_0 \odot \gamma'_1$ is. □

Een belangrijk voorbeeld van weghomotopie is herparametrisatie van wegen (verandering van variabelen).

Lemma 19.4. *Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg. Bekijk twee continue functies*

$$\phi_1, \phi_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

zodanig dat voor zekere $s_0, s_1 \in [0, 1]$ geldt

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = s_0, \quad \phi_1(1) = \phi_2(1) = s_1.$$

Dan zijn de “geherparametriseerde wegen” $\gamma \circ \phi_1$ en $\gamma \circ \phi_2$ in $P(X; \gamma(s_0), \gamma(s_1))$ weghomotoop.

Bewijs. Dit is intuïtief duidelijk: het enige verschil tussen de wegen $\gamma \circ \phi_1$ en $\gamma \circ \phi_2$ is dat ze met een andere snelheid doorlopen worden. We bekijken de functie

$$\begin{aligned}\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto \gamma((1-t)\phi_1(s) + t\phi_2(s)).\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\Gamma(0, s) &= \gamma(\phi_1(s)) = (\gamma \circ \phi_1)(s), & \Gamma(1, s) &= \gamma(\phi_2(s)) = (\gamma \circ \phi_2)(s), \\ \Gamma(t, 0) &= \gamma(s_0), & \Gamma(t, 1) &= \gamma(s_1).\end{aligned}$$

Dit laat zien dat Γ een weghomotopie van $\gamma \circ \phi_1$ naar $\gamma \circ \phi_2$ is. \square

Lemma 19.5. *Zijn $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$ vier punten. Voor elk drietal wegen $\gamma_0 \in P(X; x_0, x_1)$, $\gamma_1 \in P(X; x_1, x_2)$ en $\gamma_2 \in P(X; x_2, x_3)$ zijn de wegen $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ weghomotoop.*

Bewijs. We geven eerst de vergelijkingen voor de wegen in kwestie:

$$\begin{aligned}((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s) &= \begin{cases} \gamma_0(4s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \gamma_1(4s-1) & \text{als } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_2(2s-1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} \\ (\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2))(s) &= \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_1(4s-2) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \gamma_2(4s-3) & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

We passen het vorige lemma toe met

$$\gamma = (\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$$

en

$$\phi_1(s) = s, \quad \phi_2(s) = \begin{cases} s/2 & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ s-1/4 & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ 2s-1 & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(s) \\ &= ((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(s/2) = \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(s-1/4) = \gamma_1(4s-2) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \gamma(2s-1) = \gamma_2(4s-3) & \text{als } 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2))(s).\end{aligned}$$

We zien dus dat $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ herparametrisaties van elkaar zijn, en daarmee weghomotoop zijn. \square

Lemma 19.6. *Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. Schrijf γ_0 (resp. γ_1) voor de constante weg $s \mapsto x_0$ (resp. $s \mapsto x_1$). Dan geldt*

$$\gamma \simeq \gamma_0 \odot \gamma \simeq \gamma \odot \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= s, \\ \phi_2(s) &= \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2s - 1 & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(0) = s_0 = \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot \gamma)(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ en $\gamma_0 \odot \gamma$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ en $\gamma \odot \gamma_1$ weghomotoop zijn, gaat net zo. \square

Lemma 19.7. *Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg, en zij $\gamma^{-1} \in P(X; x_1, x_0)$ de omkering van γ . Schrijf γ_0 (resp. γ_1) voor de constante weg $s \mapsto x_0$ (resp. $s \mapsto x_1$). Dan geldt*

$$\gamma \odot \gamma^{-1} \simeq \gamma_0 \quad \text{en} \quad \gamma^{-1} \odot \gamma \simeq \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= 0, \\ \phi_2(s) &= \begin{cases} 2s & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2 - 2s & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \gamma(0) \\ &= \gamma_0(s), \\ (\gamma \circ \phi_2)(s) &= \begin{cases} \gamma(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma(2 - 2s) = \gamma^{-1}(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\gamma \odot \gamma^{-1})(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ_0 en $\gamma \odot \gamma^{-1}$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ_1 en $\gamma^{-1} \odot \gamma$ weghomotoop zijn, gaat net zo. \square

20. De fundamentealgroep

Het blijkt bijzonder nuttig te zijn om wegen van een punt naar zichzelf te bekijken. Dit geeft aanleiding tot een belangrijke “invariant” van een topologische ruimte, de *fundamentealgroep*.

Definitie. Een weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ heet *gesloten* als geldt $\gamma(0) = \gamma(1)$. Een gesloten weg γ wordt ook een *lus* genoemd, en het punt $\gamma(0) = \gamma(1)$ heet het *basispunt* van γ .

Notatie. Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. We schrijven $P(X; x_0)$ voor de verzameling van alle lussen met basispunt x_0 , en $\pi_1(X, x_0)$ voor het quotiënt van $P(X; x_0)$ naar de equivalentierelatie \simeq .

Stelling 20.1. *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$,*

(a) *Er bestaat een unieke afbeelding*

$$\begin{aligned}\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ (\lambda, \lambda') &\longrightarrow \lambda \cdot \lambda'\end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ geldt

$$[\gamma] \cdot [\gamma'] = [\gamma \odot \gamma'].$$

(b) *De verzameling $\pi_1(X, x_0)$ voorzien van de bewerking \cdot is een groep. Het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is de klasse van de constante weg $\gamma_0: s \mapsto x_0$, en de inverse van $[\gamma]$ is $[\gamma^{-1}]$.*

Bewijs. Voor (a) moeten we bewijzen dat de weghomotopieklasse van $\gamma \odot \gamma'$ niet verandert als we γ en γ' vervangen door wegen die daarmee weghomotoop zijn. Dit volgt echter uit lemma 19.3.

De eigenschappen in (b) volgen uit de lemma's 19.5, 19.6 en 19.7. \square

Definitie. De *fundamentealgroep* van X met betrekking tot het basispunt x_0 is $\pi_1(X, x_0)$.

Voorbeeld. Zij $X = \{p\}$ een eenpuntruimte. Dan zijn alle wegen in X gelijk, dus $P(X; p)$ en $\pi_1(X, p)$ hebben beide slechts één element. Met andere woorden: X heeft triviale fundamentealgroep.

Propositie 20.2. *Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan zijn de groepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ isomorf.*

Bewijs. Zie opgave 106. \square

Definitie. Een topologische ruimte X heet *enkelvoudig samenhangend* als X wegsamenhangend is en de groep $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is (voor een willekeurig gekozen $x_0 \in X$; de keuze maakt niet uit wegens de vorige propositie).

21. Overdekkingsruimten en het liften van wegen

Tot nu toe is er geen topologische ruimte waarvan we kunnen bewijzen dat hij een niet-triviale fundamenteaalgroep heeft. We zullen zien dat de fundamenteaalgroep van de eenheidscirkel S^1 isomorf is met de oneindige cyclische groep \mathbf{Z} . Hiervoor hebben we een aantal nieuwe noties nodig.

Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *overdekkingsruimte* van X is een paar (Y, p) met Y een topologische ruimte en $p: Y \rightarrow X$ een surjectieve continue afbeelding met de volgende eigenschap: X heeft een open overdekking \mathcal{U} zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{U}$ de deelruimte $p^{-1}U \subseteq Y$ een disjuncte vereniging is van open verzamelingen $V \subseteq Y$ waarvoor de afbeelding $p|_V: V \rightarrow U$ een homeomorfisme is. De open deelverzamelingen $V \subseteq Y$ heten *bladen* van Y over U . De afbeelding p heet een *overdekkingsafbeelding*.

Opmerking. De voorwaarde op $p^{-1}U$ kan ook als volgt geformuleerd worden: $p^{-1}U$ is homeomorf met een product $S \times U$, waarbij S een niet-lege discrete topologische ruimte is, zodanig dat de afbeelding $p^{-1}U \rightarrow U$ correspondeert met de projectie $S \times U \rightarrow U$ op de tweede coördinaat.

Voorbeeld. We nemen $X = S^1$ en bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

We beweren dat p een overdekkingsafbeelding is. We bekijken de open deelverzameling $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$. Er geldt

$$\begin{aligned} p^{-1}U &= \{t \in \mathbf{R} \mid \cos(2\pi t) > 0\} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbf{Z}} \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Dan is p voor elke $n \in \mathbf{Z}$ een homeomorfisme $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}) \xrightarrow{\sim} U$. Een dergelijke uitspraak geldt voor de open deelverzamelingen van S^1 gedefinieerd door $x < 0$, $y > 0$ respectievelijk $y < 0$. Hiermee krijgen we een open overdekking van S^1 met de vereiste eigenschap.

Lemma 21.1. *Zij X een topologische ruimte, zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg en zij \mathcal{U} een open overdekking van X . Dan bestaan er $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ met*

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

en open verzamelingen $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ zodanig dat voor alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ geldt $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$.

Bewijs. We merken op dat $\{\gamma^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ een open overdekking van $[0, 1]$ is. Door deze overdekking te verfijnen, krijgen we een open overdekking \mathcal{V} van $[0, 1]$ met intervallen die open zijn in $[0, 1]$ en zodanig dat voor elke $V \in \mathcal{V}$ geldt

$\gamma(V) \subseteq U$ voor een $U \in \mathcal{U}$. Aangezien $[0, 1]$ compact is, mogen we aannemen dat \mathcal{V} eindig is.

Zij $t_0 = 0$, en zij $V_1 \in \mathcal{V}$ zodanig dat $t_0 \in V_1$. Als 1 in V_1 ligt, nemen we $t_1 = 1$ en zijn we klaar. We kunnen dus aannemen dat 1 niet in V_1 ligt. Dan is V_1 te schrijven als $[t_0, b_1)$ met $b_1 \in (t_0, 1]$; er geldt $V_1 \cap [b_1, 1] = \emptyset$ en $\mathcal{V} \setminus \{V_1\}$ is een open overdekking van $[b_1, 1]$ met open deelverzamelingen van $[0, 1]$. Omdat $[0, 1]$ samenhangend is, is $V_1 \cap \bigcup_{V \in \mathcal{V} \setminus \{V_1\}} V$ niet leeg en bevat dus een element $t_1 \in (t_0, b_1)$. We passen het voorgaande argument toe op het interval $[t_1, 1]$ en de open overdekking $\{V \cap [t_1, 1] \mid V \in \mathcal{V} \setminus \{V_1\}\}$. Door dit te herhalen (eindig vaak omdat \mathcal{V} eindig is), krijgen we de gevraagde $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$. Voor elke $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ bestaat er per constructie een $U_j \in \mathcal{U}$ met $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \gamma(V_j) \subseteq U_j$; dit geeft de gevraagde $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$. \square

Propositie 21.2. *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ een weg met $\gamma(0) = x_0$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y_0 \in Y$ zodanig dat $p(y_0) = x_0$. Dan is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_{y_0}: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\gamma}_{y_0} = \gamma$ en $\tilde{\gamma}_{y_0}(0) = y_0$.*

De weg $\tilde{\gamma}_{y_0}$ als boven heet de *lift* van γ naar de overdekkingsruimte Y met beginpunt y_0 .

Bewijs. Zij \mathcal{U} een open overdekking van X als in de definitie van overdekkingsruimten. We kiezen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ en $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ als in het bovenstaande lemma. Voor alle $1 \leq j \leq n$ schrijven we

$$x_j = \gamma(t_j) \in U_{j-1} \cap U_j$$

en schrijven we $p^{-1}U_j$ als een disjuncte vereniging van bladen, dus

$$p^{-1}U_j = \bigsqcup_{V \in \mathcal{V}_j} V$$

met \mathcal{V}_j een collectie open deelverzamelingen van $p^{-1}U_j$ zodanig dat voor elke $V \in \mathcal{V}_j$ de continue afbeelding $p|_V: V \rightarrow U_j$ een homeomorfisme is.

Zij $V_1 \in \mathcal{V}_1$ het blad van $p^{-1}U_1$ dat y_0 bevat. Per aanname is de afbeelding

$$p|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_1$$

een homeomorfisme. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1: [t_0, t_1] &\longrightarrow V_1 \\ t &\longmapsto (p|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dan is $\tilde{\gamma}_1: [t_0, t_1] \rightarrow Y$ een weg van y_0 naar een tweede punt $y_1 = \tilde{\gamma}_1(t_1) \in V_1 \subseteq Y$.

Zij $V_2 \in \mathcal{V}_2$ het blad van $p^{-1}U_2$ dat y_1 bevat. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2: [t_1, t_2] &\longrightarrow V_2 \\ t &\longmapsto (p|_{V_2})^{-1}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

en $y_2 = \tilde{\gamma}_2(t_2)$. Zo verdergaand vinden we achtereenvolgens open deelverzamelingen $V_j \subseteq Y$, punten $y_j \in V_j$ met $p(y_j) = x_j$ en continue afbeeldingen

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_j: [t_{j-1}, t_j] &\longrightarrow V_j \\ t &\longmapsto (p|_{V_j})^{-1}(\gamma(t))\end{aligned}$$

met $\tilde{\gamma}_j(t_{j-1}) = y_{j-1}$ en $\tilde{\gamma}_j(t_j) = y_j$. Wegens $\tilde{\gamma}_j(t_j) = y_j = \tilde{\gamma}_{j+1}(t_j)$ is er een unieke weg

$$\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow Y$$

waarvan de beperking tot $[t_{j-1}, t_j]$ voor alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gelijk is aan $\tilde{\gamma}_j$.

We merken nu op dat $\tilde{\gamma}_j$ de *unieke* continue afbeelding $[t_{j-1}, t_j] \rightarrow Y$ is die voldoet aan $\tilde{\gamma}_j(t_{j-1}) = y_{j-1}$ en $p \circ \tilde{\gamma}_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$. Omdat namelijk geldt $y_{j-1} \in V_j$ en het beeld van zo'n afbeelding $\tilde{\gamma}_j$ samenhangend is, is dit beeld bevat in V_j , en omdat $p|_{V_j}$ een homeomorfisme is, volgt dat zo'n $\tilde{\gamma}_j$ noodzakelijkerwijs gegeven wordt door de bovenstaande definitie. We concluderen dat $\tilde{\gamma}$ de unieke lift van γ met beginpunt y_0 is. \square

Voorbeeld. Zij $X = S^1$, en zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor elke $n \in \mathbf{Z}$ definiëren we een lus $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ door

$$\begin{aligned}\gamma^n: [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)).\end{aligned}$$

We bekijken opnieuw de afbeelding

$$\begin{aligned}p: \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).\end{aligned}$$

Er geldt

$$p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}.$$

Voor alle $m \in p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ is de weg $(\widetilde{\gamma^n})_m: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven door

$$(\widetilde{\gamma^n})_m(s) = m + ns.$$

Propositie 21.3. *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij $\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ een continue afbeelding met $\Gamma(0, 0) = x_0$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y_0 \in Y$ zodanig dat $p(y_0) = x_0$.*

- (a) *Er bestaat een unieke continue afbeelding $\tilde{\Gamma}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$ en $\tilde{\Gamma}(0, 0) = y_0$.*
- (b) *Als Γ een weghomotopie is, dan is $\tilde{\Gamma}$ ook een weghomotopie.*

Bewijs. (a) Dit gaat op een soortgelijke manier als het bewijs van propositie 21.2. We geven hier een constructie die niet direct laat zien dat $\tilde{\Gamma}$ continu is; zie het boek (Runde, Lemma 5.2.4) voor een volledig bewijs.

We definiëren eerst

$$\begin{aligned}\Gamma_0: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \Gamma(t, 0).\end{aligned}$$

Wegens propositie 21.2 is er een unieke weg $\tilde{\Gamma}_0: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0$ en $\tilde{\Gamma}_0(0) = x_0$. Voor elke $t \in [0, 1]$ bekijken we nu de weg

$$\begin{aligned}\gamma_t: [0, 1] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \Gamma(t, s).\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\gamma_t(0) &= \Gamma(t, 0) \\ &= \Gamma_0(t) \\ &= p(\tilde{\Gamma}_0(t)).\end{aligned}$$

Wegens propositie 21.2 is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_t: [0, 1] \rightarrow Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\gamma}_t = \gamma_t$ en $\tilde{\gamma}_t(0) = \tilde{\Gamma}_0(t)$. We definiëren

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (t, s) &\longmapsto \tilde{\gamma}_t(s).\end{aligned}$$

Zoals gezegd, bewijzen we hier niet dat $\tilde{\Gamma}$ continu is.

(b) Stel dat Γ een weghomotopie is. Dan geldt $\Gamma(t, 0) = x_0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Hieruit volgt dat de afbeelding $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t, 0)$ een lift van de constante weg $t \mapsto x_0$ is met beginpunt y_0 . Ook de afbeelding $t \mapsto y_0$ is zo'n lift. Wegens uniciteit van lifts impliceert dit $\tilde{\Gamma}(t, 0) = y_0$ voor alle $t \in [0, 1]$. Op dezelfde manier zien we dat $t \mapsto \Gamma(t, 1)$ een constante weg is. Hieruit volgt dat $\tilde{\Gamma}$ een weghomotopie is. \square

Gevolg 21.4. *Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen die weghomotoop zijn. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zijn $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}': [0, 1] \rightarrow Y$ lifts van γ respectievelijk γ' . Als $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{\gamma}'$ hetzelfde beginpunt hebben, dan hebben ze ook hetzelfde eindpunt.*

22. Een groepswerking van de fundamentealgroep

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van groepen is het begrip groepswerking, bekend uit Algebra 1. Gegeven een topologische ruimte X , een punt $x_0 \in X$ en een overdekkingsafbeelding $p: Y \rightarrow X$ laten we nu zien dat de fundamentealgroep $\pi_0(X, x_0)$ via het liften van wegen werkt op de verzameling $p^{-1}\{x_0\}$.

Stelling 22.1. *Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $Y_0 = p^{-1}\{x_0\}$.*

(a) *Er bestaat een unieke afbeelding van verzamelingen*

$$\begin{aligned}Y_0 \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow Y_0 \\ (y_0, \lambda) &\longmapsto y_0 \star \lambda\end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ en alle $y_0 \in Y_0$ geldt

$$y_0 \star [\gamma] = \tilde{\gamma}_{y_0}(1).$$

- (b) De in (a) gedefinieerde afbeelding is een rechtswerking van de groep $\pi_1(X, x_0)$ op de verzameling Y_0 .
- (c) Als Y wegsamenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0 .
- (d) Als Y enkelvoudig samenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ vrij op Y_0 .

Bewijs. (a) Als $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ hetzelfde element van $\pi_1(X, x_0)$ representeren, dan zijn γ en γ' weghomotoop. Wegens gevolg 21.4 zijn dan ook $\tilde{\gamma}_{y_0}$ en $\tilde{\gamma}'_{y_0}$ weghomotoop; in het bijzonder geldt $\tilde{\gamma}_{y_0}(1) = \tilde{\gamma}'_{y_0}(1)$. Dit laat zien dat de afbeelding \star goed gedefinieerd is.

(b) We moeten twee uitspraken bewijzen: (1) als γ_0 de constante weg $s \mapsto x_0$ is, dan geldt voor alle $y_0 \in Y_0$ de identiteit

$$y_0 \star [\gamma_0] = y_0,$$

en (2) voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ en $y_0 \in Y_0$ geldt de identiteit

$$(y_0 \star [\gamma]) \star [\gamma'] = y_0 \star ([\gamma] \cdot [\gamma']).$$

De eerste uitspraak volgt uit het feit dat de lift van γ_0 met beginpunt y_0 de constante weg $s \mapsto y_0$ is. We moeten nog de tweede uitspraak bewijzen. Zij $\tilde{\gamma}_{y_0}$ de lift van γ met beginpunt y_0 , en zij $y_1 = \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$. Zij $\tilde{\gamma}'_{y_1}$ de lift van γ' met beginpunt y_1 , en zij $y_2 = \tilde{\gamma}'_{y_1}(1)$. Dan geldt per definitie

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \star [\gamma], \\ y_2 &= y_1 \star [\gamma'] \\ &= (y_0 \star [\gamma]) \star [\gamma']. \end{aligned}$$

Anderzijds is het eindpunt van $\tilde{\gamma}_{y_0}$ gelijk aan het beginpunt van $\tilde{\gamma}'_{y_1}$, namelijk y_1 , en is de aaneenschakeling $\tilde{\gamma}_{y_0} \odot \tilde{\gamma}'_{y_1}$ de unieke lift van $\gamma \odot \gamma'$ met beginpunt y_0 . Hieruit volgt

$$\begin{aligned} y_2 &= (\tilde{\gamma}_{y_0} \odot \tilde{\gamma}'_{y_1})(1) \\ &= \widetilde{(\gamma \odot \gamma')}_{y_0}(1) \\ &= y_0 \star [\gamma \odot \gamma'] \\ &= y_0 \star ([\gamma] \cdot [\gamma']), \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

(c) Gegeven twee punten $y_0, y'_0 \in Y_0$ bestaat er een weg $\tilde{\gamma}$ van y_0 naar y'_0 in Y . Nu is de weg $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ per definitie een lus waarvan de lift $\tilde{\gamma}_{y_0}$ met beginpunt y_0 gelijk is aan $\tilde{\gamma}$. Er geldt dus $y_0 \star [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = y'_0$. Dit laat zien dat $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0 werkt.

(d) Zij $y_0 \in Y_0$. We moeten laten zien dat de stabilisator van y_0 in $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is. Zij $[\gamma]$ een element van deze stabilisator. Dan heeft de lift $\tilde{\gamma}_{y_0}$ van γ met beginpunt y_0 ook eindpunt y_0 , dus $\tilde{\gamma}_{y_0}$ is een lus in y_0 . Omdat Y enkelvoudig samenhangend is, is $\tilde{\gamma}_{y_0}$ homotoop met de constante weg $s \mapsto y_0$. Hieruit volgt dat γ homotoop is met de constante weg $s \mapsto x_0$, dus dat $[\gamma]$ het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is. \square

Voorbeeld. Neem weer $X = S^1$ en $x_0 = (1, 0)$, en zij $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ de eerder gedefinieerde overdekking. Voor alle $m \in Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ volgt uit de eerder bewezen gelijkheid $(\widetilde{\gamma^n})_m(s) = m + ns$ dat geldt

$$m \star [\gamma^n] = m + n.$$

23. De fundamentealgroep van de cirkel

Met de hierboven gedefinieerde groepswerking tot onze beschikking kunnen we nu bewijzen dat de fundamentealgroep van de cirkel S^1 isomorf is met de oneindige cyclische groep \mathbf{Z} .

Stelling 23.1. *Zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ schrijven we $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ voor de lus gegeven door*

$$\begin{aligned} \gamma^n: [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)). \end{aligned}$$

(a) *De fundamentealgroep $\pi_1(S^1, x_0)$ is een oneindige cyclische groep voortgebracht door de weghomotopieklasse $[\gamma^1]$, d.w.z. het groepshomomorfisme*

$$\begin{aligned} \omega: \mathbf{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, x_0) \\ n &\longmapsto [\gamma^1]^n \end{aligned}$$

is een isomorfisme.

(b) *Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ is het element $[\gamma^1]^n \in \pi_1(S^1, x_0)$ gelijk aan de klasse $[\gamma^n]$ van de weg $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$.*

Bewijs. Zij $p: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ de eerder gedefinieerde overdekking. Omdat \mathbf{R} wegsamenhangend en enkelvoudig samenhangend is, werkt de groep $\pi_1(S^1, x_0)$ vrij en transitief op de verzameling $Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ wegens stelling 22.1. Dit betekent dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \sigma: \pi_1(S^1; x_0) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto 0 \star [\gamma] \end{aligned}$$

een bijectie is. We merken op dat $[\gamma^1] \in \pi_1(S^1, x_0)$ op $Y_0 = \mathbf{Z}$ werkt als translatie over 1, d.w.z. er geldt $m \star [\gamma^1] = m + 1$ en hiermee $m \star [\gamma^1]^n = m + n$ voor alle $m, n \in \mathbf{Z}$. Dit impliceert dat voor alle $n \in \mathbf{Z}$ geldt

$$\sigma(\omega(n)) = 0 \star [\gamma^1]^n = n.$$

Dus ω is de inverse van σ en hiermee ook een bijectie. We berekenen

$$\begin{aligned}\sigma([\gamma^n]) &= 0 \star [\gamma^n] \\ &= n \\ &= \sigma([\gamma^1]^n); \end{aligned}$$

wegens de injectiviteit van σ volgt $[\gamma^n] = [\gamma^1]^n$. □

24. Homotopie-equivalentie

Definitie. Zijn X en Y topologische ruimten. Een *homotopie-equivalentie* van X naar Y is een continue afbeelding

$$f: X \rightarrow Y$$

zodanig dat er een continue afbeelding $g: Y \rightarrow X$ bestaat waarvoor $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) homotoop is met de identiteit op X (resp. op Y).

Als $f: X \rightarrow Y$ een homotopie-equivalentie is, dan is een afbeelding $g: Y \rightarrow X$ als in de bovenstaande definitie duidelijk ook een homotopie-equivalentie. Verder is de samenstelling van twee homotopie-equivalenties ook een homotopie-equivalentie.

Definitie. Twee topologische ruimten X en Y worden *homotopie-equivalent* genoemd als er een homotopie-equivalentie van X naar Y bestaat.

Voorbeeld. (1) Zij $f: X \rightarrow Y$ een homeomorfisme. Dan is f een homotopie-equivalentie.

(2) Zij $X = \mathbf{R}^n$, en zij $Y = \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^n &\rightarrow \{0\} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g: \{0\} &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ 0 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Dan is $g \circ f$ homotoop met de identiteit op \mathbf{R}^n (zie een eerder voorbeeld), en $f \circ g$ is de identiteit op $\{0\}$. Hieruit volgt dat \mathbf{R}^n en $\{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

(3) Zij $X = S^1$, en zij $Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow S^1 \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y). \end{aligned}$$

Dan is $g \circ f$ gelijk aan de identiteit op S^1 , en $f \circ g$ is homotoop met de identiteit op $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ via de homotopie

$$F: [0, 1] \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$$

$$(t, (x, y)) \longmapsto \frac{1}{t + (1-t)\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y).$$

Hieruit volgt dat S^1 en $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

Definitie. Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat de constante afbeelding $f_0: X \rightarrow X$ met beeld $\{x_0\}$ homotoop is met de identiteit op X .

Lemma 24.1. *Een topologische ruimte X is samentrekbaar dan en slechts dan als X homotopie-equivalent is met de eenpuntruimte $\{0\}$.*

Bewijs. Opgave. □

Propositie 24.2. *Zij X een topologische ruimte. Als X samentrekbaar is, dan is X enkelvoudig samenhangend.*

Bewijs. Per aanname is X homotopie-equivalent met de eenpuntruimte. Hieruit volgt dat de fundamentealgroep van X isomorf is met de fundamentealgroep van de eenpuntruimte; deze is triviaal, dus hetzelfde geldt voor de fundamentealgroep van X . □

Opmerking. De omkering geldt niet: de eenheidsbol S^2 is wel enkelvoudig samenhangend, maar niet samentrekbaar.

25. Fundamentealgroepen, continue afbeeldingen en homotopie

We gaan nu bekijken hoe de fundamentealgroep zich gedraagt onder continue afbeeldingen. Het hoofdresultaat is dat de fundamentealgroep een “invariant is op homotopie-equivalentieclassen van topologische ruimten”.

Stelling 25.1. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding, zij $x_0 \in X$, en zij $y_0 = f(x_0)$.*

(a) *Er is een unieke afbeelding*

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

met de eigenschap dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ geldt

$$f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

(b) *De afbeelding f_* is een groepshomomorfisme.*

(c) *Zij $g: Y \rightarrow Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z_0 = g(y_0)$. Dan geldt*

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

(als afbeeldingen van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Z, z_0)$).

Bewijs. Zie opgave 108. □

We bekijken nu hoe de zojuist ingevoerde geïnduceerde afbeeldingen op fundamentealgroepen zich verhouden tot homotopieën.

Propositie 25.2. *Zijn X en Y topologische ruimten, en zij $x_0 \in X$. Zijn $f, g: X \rightarrow Y$ twee continue afbeeldingen, en zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van f naar g . Zij α de weg in Y gedefinieerd door $\alpha(t) = F(t, x_0)$. Dan voldoet het isomorfisme*

$$\phi_\alpha: \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, g(x_0))$$

geïnduceerd door α (zie opgave 106 of Runde, Proposition 5.1.23) aan de vergelijking

$$\phi_\alpha \circ f_* = g_*.$$

Bewijs. Zij $\gamma \in P(X; x_0)$ een lus. We schrijven

$$\gamma_t(s) = F(t, \gamma(s)).$$

In het bijzonder geldt

$$\begin{aligned} \gamma_0(s) &= f(\gamma(s)), \\ \gamma_1(s) &= g(\gamma(s)). \end{aligned}$$

We moeten bewijzen dat de wegen

$$\gamma_0 \odot \alpha \quad \text{en} \quad \alpha \odot \gamma_1$$

van $f(x_0)$ naar $g(x_0)$ weghomotop zijn. We definiëren een afbeelding

$$\begin{aligned} H: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (t, s) &\longmapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq t/2, \\ \gamma_t(2s - t) & \text{als } t/2 \leq s \leq (t+1)/2, \\ \alpha(2s - 1) & \text{als } (t+1)/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat H continu is. Voor alle $s \in [0, 1]$ geldt

$$H(0, s) = \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

en

$$H(1, s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_1(2s - 1) & \text{als } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

dus H is een homotopie van $\gamma_0 \odot \alpha$ naar $\alpha \odot \gamma_1$. Tot slot merken we op dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$H(t, 0) = \alpha(0) = f(x_0) \quad \text{en} \quad H(t, 1) = \alpha(1) = g(x_0)$$

dus H is een weghomotopie. □

Stelling 25.3. *Zij $f: X \rightarrow Y$ een homotopie-equivalentie. Zij $x_0 \in X$ en zij $y_0 = f(x_0)$. Dan is $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ een isomorfisme.*

Bewijs. Zij $g: Y \rightarrow X$ een continue afbeelding zodanig dat $g \circ f \sim \text{id}_X$ en $f \circ g \sim \text{id}_Y$. We schrijven $x_1 = g(y_0)$ en $y_1 = f(x_1)$. Zij $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ een homotopie van id_X naar $g \circ f$, en zij $G: [0, 1] \times Y \rightarrow X$ een homotopie van id_Y naar $f \circ g$. We schrijven verder $\alpha(t) = F(t, x_0)$ en $\beta(t) = G(t, y_0)$. Dan is er een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow[\cong]{\text{id}} & \pi_1(Y, y_0) \\
 \text{id} \downarrow = & \searrow & \downarrow g_* & \searrow & \sim \downarrow \phi_\beta \\
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\phi_\alpha]{\sim} & \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1).
 \end{array}$$

De diagonale afbeelding in het linker vierkant is een isomorfisme, dus g_* is surjectief. Ook de diagonale afbeelding in het rechter vierkant is een isomorfisme, dus g_* is injectief. Hieruit volgt dat g_* een isomorfisme is, dus ook f_* is een isomorfisme. \square

Ook de volgende variant is vaak nuttig.

Definitie. *Zij X een topologische ruimte, en zij Y een deelruimte van X . Een retractie van X op Y is een continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat $f|_Y$ de identiteit op Y is.*

Propositie 25.4. *Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X , en zij $x_0 \in Y \subseteq X$. Als er een retractie van X op Y bestaat, dan is de afbeelding $\pi_1(Y, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injectief.*

Bewijs. Zij $i: Y \rightarrow X$ de inclusieafbeelding, en zij $f: X \rightarrow Y$ een retractie van X op Y . Per definitie geldt $f \circ i = \text{id}_Y$. Dit impliceert dat $f_* \circ i_* = (f \circ i)_*$ de identiteit op $\pi_1(Y, x_0)$ is. In het bijzonder is i_* injectief en f_* surjectief. \square

Een belangrijke toepassing van propositie 27.4 heeft betrekking op continue afbeeldingen $D^2 \rightarrow D^2$, waarbij

$$\begin{aligned}
 D^2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}
 \end{aligned}$$

de gesloten eenheidsschijf is.

Stelling 25.5 (Dekpuntsstelling van Brouwer). *Zij $f: D^2 \rightarrow D^2$ een continue afbeelding. Dan bestaat er een $z \in D^2$ zodanig dat $f(z) = z$.*

Bewijs. Stel dat f geen dekpunt heeft. We definiëren een afbeelding $g: D^2 \rightarrow S^1$ als volgt: voor $z \in D^2$ is $g(z)$ het snijpunt van de lijn door z en $f(z)$ met S^1 zodanig dat z tussen $f(z)$ en $g(z)$ op deze lijn ligt. Het is eenvoudig na te gaan (bijvoorbeeld door een formule voor $g(z)$ op te schrijven) dat g continu is. Verder

geldt duidelijk $g(z) = z$ voor alle $z \in S^1$, dus g is een retractie. Uit propositie 25.4 volgt dat g een injectie

$$g_*: \pi_1(S^1, (1, 0)) \longrightarrow \pi_1(D^2, (1, 0))$$

induceert. De fundamentealgroep van S^1 is echter isomorf met \mathbf{Z} , terwijl de fundamentealgroep van D^2 triviaal is, een tegenspraak. We concluderen dat f een dekpunt heeft. \square

Opgaven

In alle opgaven beschouwen we \mathbf{R}^n , tenzij anders aangegeven, als metrische ruimte met behulp van de euclidische metriek

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

1. Ga van de volgende deelverzamelingen van \mathbf{R} na of ze open en of ze gesloten zijn.

- (a) \emptyset ;
- (b) \mathbf{R} ;
- (c) $(0, \infty)$;
- (d) $[0, \infty)$;
- (e) (a, b) met $a, b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;
- (f) $[a, b]$ met $a, b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;
- (g) $(a, b]$ met $a, b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;
- (h) \mathbf{Z} ;
- (i) \mathbf{Q} ;
- (j) $\{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$.

2. Ga van de volgende deelverzamelingen van \mathbf{R}^2 na of ze open en of ze gesloten zijn.

- (a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0\}$;
- (c) $\{(x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$;
- (d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;
- (e) \mathbf{Z}^2 ;
- (f) $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$.

3. In deze opgave laten we zien dat \emptyset en \mathbf{R} de enige deelverzamelingen van \mathbf{R} zijn die (met betrekking tot de euclidische metriek) zowel open als gesloten zijn.

- (a) Neem aan dat $U \subseteq \mathbf{R}$ zowel open als gesloten is. Laat (met behulp van de ϵ - δ -definitie) zien dat de functie

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in U, \\ 0 & \text{als } x \notin U \end{cases}$$

continu is.

- (b) Laat met behulp van de tussenwaardstelling zien dat geldt $U \in \{\emptyset, \mathbf{R}\}$.

4. Geef een oneindige collectie \mathcal{U} van open deelverzamelingen van \mathbf{R} zodanig dat $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ géén open deelverzameling van \mathbf{R} is.
5. (Runde, 2.1.1.) Zij S een verzameling, en zij X de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van S . Voor $A, B \in X$ definiëren we het symmetrisch verschil $A \triangle B$ als

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) &\longmapsto \#(A \triangle B) \end{aligned}$$

een metriek op X is. (We schrijven $\#E$ voor de kardinaliteit van een eindige verzameling E .)

6. Een metriek d op een verzameling F heet een *Franse-spoorwegmetriek* als er een $p \in F$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

Stel dat er twee verschillende punten $p, q \in F$ bestaan met de bovenstaande eigenschap. Bewijs dat $F = \{p, q\}$.

7. Zij (X, d) een metrische ruimte. De *diameter* van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is gedefinieerd als

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Bekijk een keten van deelverzamelingen $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ van X zodanig dat

$$\text{diam}(S_n) \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty.$$

Bewijs dat $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ ten hoogste één punt bevat.

8. (Runde, 2.2.1.) Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat elke eindige deelverzameling van X gesloten is.
9. Een metrische ruimte (X, d) heet *discreet* als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x) = \{x\}$. Bewijs dat elke eindige metrische ruimte (d.w.z. elke metrische ruimte (X, d) zodanig dat X een eindige verzameling is) discreet is.
10. (Runde, 2.2.6.) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X . Bewijs dat een deelverzameling $U \subseteq Y$ open is in de metrische ruimte $(Y, d|_{Y \times Y})$ dan en slechts dan als er een open deelverzameling V van (X, d) bestaat zodanig dat $U = Y \cap V$.

11. Zij $\mathbf{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de eenheidscircel in \mathbf{R}^2 . Gegeven twee punten $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ in \mathbf{S}^1 definiëren we $\theta(x, y) \in [0, \pi]$ als de (ongerichte) hoek tussen x en y gezien als vectoren, dus

$$\cos \theta(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Bewijs dat θ een metriek op \mathbf{S}^1 is.

12. Zij p een priemgetal. Voor $x \in \mathbf{Q}^\times$ definiëren we

$$\text{ord}_p(x) = n \quad \text{als } x = p^n \frac{a}{b} \text{ met } a, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$$

en voor $x \in \mathbf{Q}$ definiëren we de *p-adische absolute waarde* van x als

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ p^{-\text{ord}_p(x)} & \text{als } x \neq 0. \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat $|\cdot|_p$ voldoet aan de *sterke driehoeksongelijkheid*: voor alle $x, y \in \mathbf{Q}$ geldt

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

- (b) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d_p: \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p \end{aligned}$$

een metriek op \mathbf{Q} is.

13. (Runde, 2.1.3.) Zij S een niet-lege verzameling.

- (a) Zij (Y, d) een metrische ruimte. Een functie $f: S \rightarrow Y$ heet *begrensd* als er een positief reëel getal M bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in S$ geldt $d(f(x), f(y)) < M$. Zij $B(S, Y)$ de verzameling van begrensde functies $S \rightarrow Y$. Voor $f, g \in B(S, Y)$ definiëren we

$$D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)).$$

Laat zien dat D een metriek op $B(S, Y)$ is.

- (b) Zij E een reële vectorruimte voorzien van een norm $\|\cdot\|$. Voor $f \in B(S, E)$ definiëren we

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} \|f(x)\|.$$

Laat zien dat $\|\cdot\|_\infty$ een norm op $B(S, E)$ is. Wat is het verband met (a)?

14. Bekijk op $V = \mathbf{R}^2$ de euclidische norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{E}}: V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

en de Manhattannorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{M}}: V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

We schrijven $d_{\mathbf{E}}$ en $d_{\mathbf{M}}$ voor de door deze normen gedefinieerde metrieken op V , en voor $x \in V$ en $\epsilon > 0$ definiëren we

$$B_{\epsilon}^{\mathbf{E}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathbf{E}}(x, y) < \epsilon\}$$

en

$$B_{\epsilon}^{\mathbf{M}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathbf{M}}(x, y) < \epsilon\}.$$

(a) Laat zien dat voor alle $x \in V$ geldt

$$\|x\|_{\mathbf{E}} \leq \|x\|_{\mathbf{M}} \leq \sqrt{2}\|x\|_{\mathbf{E}}.$$

(b) Zij $x \in V$ en zij $\epsilon > 0$. Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B_{\delta}^{\mathbf{E}}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{\mathbf{M}}(x)$.

(c) Bewijs omgekeerd dat er voor alle $x \in V$ en $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B_{\delta}^{\mathbf{M}}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{\mathbf{E}}(x)$.

(d) Leid hieruit af dat een deelverzameling $Y \subseteq V$ open is in $(V, d_{\mathbf{E}})$ dan en slechts dan als Y open is in $(V, d_{\mathbf{M}})$.

15. (Runde, voorbeeld 2.1.2(f).) Zij (X, d) een metrische ruimte. Bekijk de functie

$$\begin{aligned} \tilde{d}: X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat \tilde{d} een metriek op X is die voldoet aan $\tilde{d}(x, y) < 1$ voor alle $x, y \in X$.

(b) Bewijs dat een deelverzameling $Y \subseteq X$ open is in (X, d) dan en slechts dan als Y open is in (X, \tilde{d}) .

16. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten. Een *isometrie* van (X, d) naar (X', d') is een afbeelding $f: X \rightarrow X'$ zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

(a) Laat zien dat elke isometrie injectief is.

(b) Zij X een verzameling van drie elementen met de metriek

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Geef een isometrie $X \rightarrow \mathbf{R}^2$, en bewijs dat er geen isometrie $X \rightarrow \mathbf{R}$ bestaat.

(c) Bepaal alle isometrieën $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

17. Zij d de euclidische metriek op \mathbf{R} , en zij \tilde{d} de metriek uit opgave 15.
- Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, d) \rightarrow (\mathbf{R}, \tilde{d})$?
 - Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, \tilde{d}) \rightarrow (\mathbf{R}, d)$?
18. Zij (X, d) een metrische ruimte. We zeggen dat (X, d) *begrensd* is als er een positief reëel getal M bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) < M$. We zeggen dat (X, d) *totaal begrensd* is als er voor elke $\epsilon > 0$ eindig veel punten x_1, \dots, x_n in X bestaan met $\bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i) = X$.
- Bewijs dat elke totaal begrensde metrische ruimte begrensd is.
- Bepaal voor elk van de volgende metrische ruimten of ze (totaal) begrensd zijn.
- \mathbf{R} ;
 - (a, b) met $a < b$ in \mathbf{R} ;
 - $[a, b]$ met $a < b$ in \mathbf{R} ;
 - (\mathbf{R}, \tilde{d}) met \tilde{d} de metriek uit opgave 15;
 - \mathbf{Z} met $d(x, y) = 0$ (resp. 1) voor $x = y$ (resp. $x \neq y$).
19. Bepaal voor elk van de gegeven verzamelingen X in de opgaven 1 en 2 het inwendige X° , de afsluiting \bar{X} en de rand ∂X .
20. Zij $(a_n)_{n \geq 0}$ een rij reële getallen die convergeert naar $a \in \mathbf{R}$.
- Zij X een gesloten deelverzameling van \mathbf{R} die alle a_n ($n \geq 0$) bevat. Laat zien dat $a \in X$.
 - Zij $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$. Laat zien dat $\bar{A} = A \cup \{a\}$ en $A^\circ = \emptyset$.
21. Geldt voor elke metrische ruimte (X, d) , elke $x \in X$ en elke $\epsilon > 0$ dat de afsluiting van de open bal $B_\epsilon(x)$ gelijk is aan de gesloten bal $B_\epsilon[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
22. (Runde, 2.2.4 en 2.3.3.) Zij (X, d) een metrische ruimte, $S \subseteq X$ een niet-lege deelverzameling en $x \in X$. De *afstand van x tot S* is
- $$\text{dist}(x, S) = \inf\{d(x, y) \mid y \in S\}.$$
- Bewijs dat \bar{S} de verzameling van alle $x \in X$ is waarvoor $\text{dist}(x, S) = 0$.
 - Bewijs dat de functie $X \rightarrow \mathbf{R}$ die x op $\text{dist}(x, S)$ afbeeldt continu is.
23. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zijn A en B deelverzamelingen van X . Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.
- $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;
 - $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

- (c) $\partial(\partial A) = \partial A$;
- (d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- (e) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- (f) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$;
- (g) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

24. Zij (X, d) een metrische ruimte en S een deelverzameling van X . Bewijs dat S dicht ligt in X dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ geldt $X = \bigcup_{s \in S} B_\epsilon(s)$.

25. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten en zij $a \in X$. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ heet *continu in a* als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Op \mathbf{R}^n en \mathbf{C} beschouwen we de euclidische metriek d_E , op \mathbf{R}^2 tevens de Manhattanmetriek d_M , en op \mathbf{R} tevens de Franse-spoorwegmetriek d_F gedefinieerd door

$$d_F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ |x| + |y| & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Bepaal voor elk van de onderstaande afbeeldingen $f: X \rightarrow Y$ de verzameling van punten van X waar f continu is.

- (a) $(\mathbf{Q}, d_E) \rightarrow (\mathbf{C}, d_E), \quad x \mapsto x$;
- (b) $(\mathbf{R}^2, d_E) \rightarrow (\mathbf{R}^2, d_M), \quad x \mapsto x$;
- (c) $(\mathbf{C}, d_E) \rightarrow (\mathbf{C}, d_E), \quad z \mapsto \begin{cases} (\exp(z) - 1)/z & \text{als } z \neq 0, \\ 0 & \text{als } z = 0; \end{cases}$
- (d) $(\mathbf{R}, d_E) \rightarrow (\mathbf{R}, d_F), \quad x \mapsto x$;
- (e) $(\mathbf{R}, d_E) \rightarrow (\mathbf{R}, d_E), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{als } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$
- (f) $(\mathbf{R}, d_F) \rightarrow (\mathbf{R}, d_E), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{als } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

26. Zij p een priemgetal, zij $|\cdot|_p$ de p -adische absolute waarde op \mathbf{Q} en zij $d_p(x, y) = |x - y|_p$ de p -adische metriek (zie opgave 12).

- (a) Bewijs dat de rij $(1, p, p^2, p^3, \dots)$ in (\mathbf{Q}, d_p) naar 0 convergeert.
- (b) Construeer een rij in \mathbf{Q} die in \mathbf{R} naar 0 convergeert en in (\mathbf{Q}, d_2) naar 1.

27. (Runde, 2.3.4.) Zijn $(E, \|\cdot\|_E)$ en $(F, \|\cdot\|_F)$ genormeerde \mathbf{R} -vectorruimten, en zij $T: E \rightarrow F$ een \mathbf{R} -lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- (1) T is continu;
- (2) T is continu in 0;
- (3) er bestaat een reëel getal C zodanig dat voor alle $x \in E$ geldt $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

28. Bewijs dat een samenstelling van twee continue afbeeldingen tussen metrische ruimten zelf ook continu is.

29. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten.

(a) Laat zien dat de functie

$$D: (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$((x, y), (x', y')) \longmapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

een metriek op het product $X \times Y$ is. Wat is het verband met de Manhattanmetriek?

(b) Bewijs dat de projecties $X \times Y \rightarrow X$ en $X \times Y \rightarrow Y$ (gedefinieerd door $(x, y) \mapsto x$ respectievelijk $(x, y) \mapsto y$) continu zijn.

(c) Zij (T, d_T) een metrische ruimte. Gegeven twee afbeeldingen $f: T \rightarrow X$ en $g: T \rightarrow Y$ definiëren we de afbeelding

$$f \times g: T \longrightarrow X \times Y$$

$$t \longmapsto (f(t), g(t)).$$

Laat zien dat $f \times g$ continu is dan en slechts dan als f en g beide continu zijn.

30. Zij N de verzameling $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$. Construeer een metriek op N met de volgende eigenschap: een rij $(y_n)_{n \geq 0}$ in een metrische ruimte Y is convergent dan en slechts dan als er een continue afbeelding $f: N \rightarrow Y$ bestaat met $f(n) = y_n$ voor alle $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

31. Zij (X, d) een metrische ruimte. We zeggen dat (X, d) *discreet* is als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat geldt $B_\epsilon(x) = \{x\}$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- (1) X is discreet;
- (2) voor elke $x \in X$ is de deelverzameling $\{x\}$ van X open;
- (3) elke deelverzameling van X is open;
- (4) elke deelverzameling van X is gesloten.

32. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten, en zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding. We zeggen dat f *lokaal constant* is als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat f constant is op $B_\epsilon(x)$. Stel dat (Y, d_Y) discreet is. Laat zien dat f continu is dan en slechts als f lokaal constant is.

33. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten, en zijn $f, g: X \rightarrow Y$ continue afbeeldingen.

- (a) Laat zien dat de verzameling $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ gesloten is in X .
- (b) Zij S een dichte deelverzameling van X , en neem aan dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in S$. Laat zien dat $f = g$.

- 34.** Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat (X, d) volledig is in elk van de volgende gevallen:
- (a) De verzameling X is eindig.
 - (b) De metriek d is een Franse-spoorwegmetriek.
 - (c) $X = \mathbf{R}$ en $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

- 35.** (Runde, 2.4.2 en 2.4.3.) Zij (X, d) een metrische ruimte. Een afbeelding $f: X \rightarrow X$ heet een *contractie* als er een reëel getal $\theta < 1$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y).$$

- (a) Bewijs dat elke contractie continu is.
 - (b) Zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X . Stel dat er een reëel getal $\theta < 1$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq 1$ geldt $d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta d(x_n, x_{n-1})$. Bewijs dat $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij is.
 - (c) Bewijs de *vastpuntenstelling van Banach*: elke contractie op een volledige, niet-lege metrische ruimte heeft precies één vast punt.
 - (d) Onderbouw de volgende uitspraak: als je een kaart van Nederland ergens in Nederland neerlegt, ligt er precies één punt van de kaart op de goede plek.
- 36.** Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee volledige metrische ruimten. We voorzien het product $X \times Y$ van de metriek

$$D((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

(zie opgave 29.) Laat zien dat $(X \times Y, D)$ volledig is.

- 37.** Een *Banachruimte* is een genormeerde \mathbf{R} -vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$ die volledig is met betrekking tot de metriek d gedefinieerd door $d(x, y) = \|x - y\|$.
- (a) Zij V de ruimte van continue functies $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ voorzien van de norm $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Laat zien dat $(V, \|\cdot\|)$ een Banachruimte is. (Aanwijzing: elke continue functie $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ is begrensd.)
 - (b) Laat zien dat iedere eindigdimensionale genormeerde \mathbf{R} -vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$ een Banachruimte is.
 - (c) Zij V de vectorruimte van alle rijtjes $(x_n)_{n \geq 0}$ met $x_n \in \mathbf{R}$ zodanig dat er een $N \geq 0$ bestaat met $x_n = 0$ voor alle $n \geq N$, voorzien van de norm

$$\|(x_n)_{n \geq 0}\| = \left(\sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

Laat zien dat V geen Banachruimte is.

38. Zij I het eenheidsinterval $[0, 1]$ en V het eenheidsvierkant $[0, 1] \times [0, 1]$, beide met de euclidische metriek, en zij $C(I, V)$ de verzameling van continue afbeeldingen $I \rightarrow V$. Aangezien V begrensd is, is $C(I, V)$ gelijk aan de verzameling $\text{BC}(I, V)$ van begrensde continue afbeeldingen $I \rightarrow V$. In deze opgave gebruiken we de volledigheid van $C(I, V)$ met betrekking tot de uniforme metriek D op $C(I, V) = \text{BC}(I, V)$ om een *vlakvullende kromme* te construeren, d.w.z. een surjectieve continue afbeelding $I \rightarrow V$.

- (a) Laat zien dat het mogelijk is om V voor elke $n \geq 0$ op een zodanige manier op te delen in $2^n \times 2^n$ vierkanten $V_{n,k}$ met zijden van lengte 2^{-n} , voor $0 \leq k \leq 4^n - 1$ (dus $V_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}] \times [c_{n,k}, d_{n,k}]$ met $a_{n,k}, b_{n,k}, c_{n,k}, d_{n,k} \in [0, 1] \cap 2^{-n}\mathbf{Z}$) dat het volgende geldt: voor $n \geq 0$ en $0 \leq k < 4^n - 1$ hebben $V_{n,k}$ en $V_{n,k+1}$ een zijde gemeen, en voor $n \geq 0$ en $0 \leq k \leq 4^n - 1$ geldt

$$V_{n,k} = V_{n+1,4k} \cup V_{n+1,4k+1} \cup V_{n+1,4k+2} \cup V_{n+1,4k+3}.$$

- (b) Zij $P_{n,k}$ het middelpunt van $V_{n,k}$. Construeer continue afbeeldingen

$$f_n: I \rightarrow V \quad (n \geq 0)$$

zodanig dat het beeld van f_n alle punten $P_{n,k}$ bevat en zodanig dat $(f_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in $C(I, V)$ is.

- (c) Laat zien dat als f de limiet van een rij als in (b) is, het beeld van f dicht ligt in V .
- (d) Zij $f: I \rightarrow V$ een continue afbeelding. Bewijs dat het beeld van f gesloten is in V . (Aanwijzing: gebruik de stelling van Bolzano–Weierstraß.)
- (e) Concludeer dat er een surjectieve continue afbeelding $I \rightarrow V$ bestaat.

[Het eerste voorbeeld van zo'n afbeelding werd gegeven door Peano in 1890. De constructie uit deze opgave is gebaseerd op een voorbeeld van Hilbert uit 1891.]

39. Een metrische ruimte (X, d) heet *discreet* als voor elke $x \in X$ de deelverzameling $\{x\}$ open is in X . Zij X de metrische deelruimte $\{2^{-n} \mid n \geq 0\}$ van \mathbf{R} .

- (a) Laat zien dat X discreet, maar niet volledig is.
- (b) Beschrijf de completering van X . Laat zien dat deze niet discreet is.

40. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten, en zij $i: X \rightarrow X'$ een afbeelding. Bewijs dat $i: X \rightarrow X'$ een completering van (X, d) is dan en slechts dan als de volgende drie uitspraken gelden:

- (1) (X', d') is volledig;
- (2) i is een isometrie;
- (3) $i(X)$ ligt dicht in X' .

[Dit laat zien dat de definitie uit het college equivalent is met de definitie in het boek (Runde, Definition 2.4.10).]

41. Zij X een metrische deelruimte van \mathbf{R}^n (met de euclidische metriek), en zij \bar{X} de afsluiting van X in \mathbf{R}^n . Bewijs dat \bar{X} samen met de inclusieafbeelding $X \rightarrow \bar{X}$ een completering van X is.
42. Bewijs dat er een unieke topologie op \mathbf{R}^2 bestaat waarvoor de gesloten verzamelingen (behalve \mathbf{R}^2 zelf) precies de eindige verenigingen van punten en lijnen zijn.
43. (Runde, 3.1.6.) Voor alle $a, b \in \mathbf{Z}$ met $b > 0$ definiëren we

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Voor $a \in \mathbf{Z}$ definiëren we \mathfrak{N}_a als de verzameling van alle deelverzamelingen $N \subseteq \mathbf{Z}$ zodanig dat er een $b > 0$ is met $N_{a,b} \subseteq N$.

- (a) Bewijs dat er een unieke topologie \mathcal{T} op \mathbf{Z} is zodanig de omgevingen van $a \in \mathbf{Z}$ met betrekking tot \mathcal{T} precies de elementen van \mathfrak{N}_a zijn. (Aanwijzing: Theorem 3.1.10 in het boek.)
- (b) Bewijs dat elke open deelverzameling van $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ ofwel oneindig ofwel leeg is.
- (c) Bewijs dat alle verzamelingen $N_{a,b}$ zowel open als gesloten zijn.
- (d) Bewijs dat $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ de vereniging is van de verzamelingen $N_{0,p}$ met p een priemgetal.
- (e) Leid uit de eerdere onderdelen af dat er oneindig veel priemgetallen zijn.
44. Een *Hausdorffruimte* is een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \emptyset$.
- (a) Laat zien dat als (X, \mathcal{T}) een Hausdorffruimte is en $x \in X$, de deelverzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten is.
- (b) Laat zien dat elke topologische deelruimte van een Hausdorffruimte weer een Hausdorffruimte is.
45. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Zijn $X' \subseteq X$ en $Y' \subseteq Y$ deelverzamelingen zodanig dat $f(X') \subseteq Y'$. Bewijs dat de door f geïnduceerde afbeelding $f': X' \rightarrow Y'$ continu is.
46. Zijn X, Y topologische ruimten, en zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding.
- (a) Zijn X_1, X_2 open deelverzamelingen van X zodanig dat $X = X_1 \cup X_2$ en zodanig dat de beperkingen $f|_{X_1}: X_1 \rightarrow Y$ en $f|_{X_2}: X_2 \rightarrow Y$ continu zijn. Bewijs dat f continu is.
- (b) Zelfde vraag met “gesloten” in plaats van “open”.

47. Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ heet *open* als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ het beeld $f(U) \subseteq Y$ een open deelverzameling van Y is.
- Geef een voorbeeld van een continue afbeelding die niet open is.
 - Geef een voorbeeld van een open afbeelding die niet continu is.
48. Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) heet *samenhangend* als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.
- Laat zien dat (X, \mathcal{T}) samenhangend is dan en slechts dan als $X \neq \emptyset$ en de enige deelverzamelingen van X die zowel open als gesloten zijn, de verzamelingen \emptyset en X zijn.
 - We voorzien $\{0, 1\}$ van de discrete topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Laat zien dat (X, \mathcal{T}) samenhangend is dan en slechts dan als er precies twee continue afbeeldingen van (X, \mathcal{T}) naar $\{0, 1\}$ zijn.
49. (Runde, 3.1.7.) Zij (X, \mathcal{T}_X) een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X . Bewijs dat $X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}$ en $X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$.
50. Laat zien dat er voor de euclidische topologie op \mathbf{R}^n een aftelbare basis bestaat.
51. Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zij \mathcal{B} een basis voor \mathcal{T} . Zij Y een deelruimte van X . Laat zien dat $\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{B}\}$ een basis voor de deelruimtetopologie op Y is.
52. Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten, en zij \mathcal{B} een basis voor \mathcal{T}_Y . Zij $f: X \rightarrow Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als voor elke $U \in \mathcal{B}$ de verzameling $f^{-1}U$ open is in X .
53. Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten zodanig dat \mathcal{T}_X de triviale (= chaotische) topologie op X is en (Y, \mathcal{T}_Y) een Hausdorffruimte is. Bewijs dat elke continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ constant is.
54. (Runde, 3.2.10.) Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten, en zij $D \subseteq X$ een dichte deelverzameling. Zijn $f, g: X \rightarrow Y$ twee continue afbeeldingen waarvoor geldt $f|_D = g|_D$.
- Neem aan dat (Y, \mathcal{T}_Y) een Hausdorffruimte is. Bewijs dat f en g gelijk zijn.
 - Geef een voorbeeld van een situatie als boven (met Y geen Hausdorffruimte) waarbij f en g ongelijk zijn.

55. Zij (X, \mathcal{T}_X) een topologische ruimte. Zij \sim een equivalentierelatie op de verzameling X , zij $Q = X/\sim$ de quotiëntverzameling, en zij $q: X \rightarrow Q$ de quotiëntafbeelding.

(a) Zij \mathcal{T}_Q de collectie van deelverzamelingen van Q gedefinieerd door

$$\mathcal{T}_Q = \{U \subseteq Q \mid q^{-1}U \text{ is open in } X\}.$$

Bewijs dat \mathcal{T}_Q een topologie op Q is, en dat q een continue afbeelding $(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Q, \mathcal{T}_Q)$ definieert.

(b) We voorzien Q van de topologie \mathcal{T}_Q uit (a). Zij Z een topologische ruimte, en zij $f: X \rightarrow Z$ een continue afbeelding zodanig dat voor alle $x, x' \in X$ geldt $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Bewijs dat er een unieke continue afbeelding $g: Q \rightarrow Z$ bestaat zodanig dat $f = g \circ q$.

De topologie \mathcal{T}_Q uit de bovenstaande opgave heet de *quotiënttopologie* op Q . De bovenstaande opgave laat zien dat wanneer we $Q = X/\sim$ voorzien van de quotiënttopologie, de universele eigenschap van quotiëntverzamelingen betekenis blijft houden in de context van continue afbeeldingen.

In alle volgende opgaven is een product $X \times Y$ van topologische ruimten steeds voorzien van de producttopologie $\mathcal{T}_{X \times Y}$.

56. Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat $X \times Y$ discreet is.

57. Zijn (X, \mathcal{T}_X) en (Y, \mathcal{T}_Y) topologische ruimten, zij \mathcal{B}_X een basis voor \mathcal{T}_X , en zij \mathcal{B}_Y een basis voor \mathcal{T}_Y . Laat zien dat $\{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ een basis voor de producttopologie $\mathcal{T}_{X \times Y}$ is.

58. Zij X een verzameling, zijn \mathcal{T}_1 en \mathcal{T}_2 topologieën op X , zij \mathcal{B}_1 een basis voor \mathcal{T}_1 , en zij \mathcal{B}_2 een basis voor \mathcal{T}_2 .

(a) Stel dat er voor alle $x \in X$ en alle $U_1 \in \mathcal{B}_1$ met $x \in U_1$ een $U_2 \in \mathcal{B}_2$ bestaat met $x \in U_2$ en $U_2 \subseteq U_1$. Bewijs dat \mathcal{T}_2 fijner is dan (of gelijk is aan) \mathcal{T}_1 , d.w.z. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(b) Bewijs dat de producttopologie op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ gelijk is aan de euclidische topologie op \mathbf{R}^2 .

59. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X een Hausdorffruimte is dan en slechts dan als de diagonaal

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

een gesloten deelverzameling van $X \times X$ is.

60. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X een Hausdorffruimte is dan en slechts dan als $X \times X$ een Hausdorffruimte is.

61. Zijn X, Y, Z drie topologische ruimten, zijn $p: X \times Y \rightarrow X$ en $q: X \times Y \rightarrow Y$ de projectieafbeeldingen en zij $f: Z \rightarrow X \times Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als de samenstellingen

$$p \circ f: Z \rightarrow X, \quad q \circ f: Z \rightarrow Y$$

continu zijn.

62. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ (de verzameling van rijen in $\{0, 1\}$) voorzien van de producttopologie.

- (a) Voor $n \geq 0$ en $s_0, s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$ definiëren we

$$B(s_0, \dots, s_n) = \{(x_i)_{i \geq 0} \in Y \mid x_0 = s_0, \dots, x_n = s_n\} \subseteq Y.$$

Laat zien dat deze verzamelingen $B(s_0, \dots, s_n)$ een basis voor de topologie op Y vormen.

- (b) Laat zien dat Y niet discreet is (zonder gebruik te maken van de stelling van Tichonov).

63. Zij $n \geq 0$.

- (a) Bewijs dat elke begrensde deelverzameling van \mathbf{R}^n totaal begrensd is.
 (b) In het college is bewezen dat voor een metrische ruimte X geldt: X is compact $\iff X$ is rijcompact $\iff X$ is volledig en totaal begrensd. Leid hieruit de stelling van Heine–Borel af: een deelverzameling $S \subseteq \mathbf{R}^n$ is (rij)compact dan en slechts dan als S gesloten en begrensd is.

64. Zij $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, en zij d de unieke Franse-spoorwegmetriek op X met centrum 0 en $d(x, 0) = 1$ voor alle $x \neq 0$.

- (a) Laat zien dat de metrische ruimte (X, d) volledig is.
 (b) Laat zien dat X begrensd is, maar niet totaal begrensd.
 (c) Geef een rij in X zonder convergente deelrij.
 (d) Geef een open overdekking van X zonder eindige deeloverdekking.
 (e) Bepaal alle compacte deelverzamelingen van X .

65. (Runde, 2.5.2.) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X met limiet x . Laat zien dat $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \cup \{x\}$ compact is.

66. (Runde, 3.3.1.) Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte, en zijn K_1, \dots, K_n compacte deelverzamelingen van X . Laat zien dat $K_1 \cup \dots \cup K_n$ compact is.

67. (Runde, 3.3.2.) Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte en zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ een basis voor \mathcal{T} . Laat zien dat X compact is dan en slechts dan als elke open overdekking \mathcal{U} van X met $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ een eindige deeloverdekking heeft.

68. Zij X een Hausdorffruimte.

- (a) Zij A een compacte deelverzameling van X , en zij $z \in X \setminus A$. Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $z \in V$.
- (b) Zijn A en B twee disjuncte compacte deelverzamelingen van X . Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.

69. Zijn X en Y niet-lege topologische ruimten. Neem aan dat $X \times Y$ compact is. Bewijs dat X en Y compact zijn.

70. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ heet *uniform continu* als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $a, b \in X$ geldt

$$d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon.$$

Neem aan dat X compact is. Bewijs dat elke continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ uniform continu is.

71. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ met de producttopologie. Gebruik de stelling van Tichonov om te bewijzen dat Y niet discreet is (vgl. opgave 62).

72. Zij (X, d) een metrische ruimte.

- (a) Stel dat X lokaal compact en volledig is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
- (b) Stel dat X lokaal compact en totaal begrensd is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

73. Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat X en Y homeomorf zijn dan en slechts dan als X en Y dezelfde kardinaliteit hebben (als verzamelingen).

74. Construeer een homeomorfisme van het eenheidsvierkant

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1/2\}$$

naar de eenheidscirkel

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

- 75.** Laat zien dat het open eenheidsinterval $(0, 1)$ en het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ niet homeomorf zijn. (Aanwijzing: vind een topologische eigenschap die $[0, 1]$ wel heeft maar $(0, 1)$ niet.)

Zij (X, \mathcal{T}) een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van (X, \mathcal{T}) is een compacte Hausdorffruimte $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ samen met een continue afbeelding $\iota: X \rightarrow X_\infty$ zodanig dat $\iota: X \rightarrow \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_\infty \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

- 76.** Zijn $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ en $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ twee eenpuntscompactificaties van (X, \mathcal{T}) met bijbehorende continue afbeeldingen $\iota: X \rightarrow X_\infty$ en $\iota': X \rightarrow X'_\infty$.

- (a) Bewijs dat er een unieke bijjectie $f: X_\infty \rightarrow X'_\infty$ bestaat waarvoor geldt $f \circ \iota = \iota'$.
- (b) Bewijs dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ en $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ homeomorf zijn.

- 77.** Zij \mathbf{R}_∞ een eenpuntscompactificatie van \mathbf{R} . Laat zien dat \mathbf{R}_∞ homeomorf is met de eenheidscirkel.

- 78.** Zij X een *compacte* Hausdorffruimte. Beschrijf de eenpuntscompactificatie van X .

- 79.** In deze opgave bewijzen we dat \mathbf{R} en \mathbf{R}^2 niet homeomorf zijn. Zij $P \in \mathbf{R}$ en $Q \in \mathbf{R}^2$.

- (a) Laat zien dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ niet samenhangend is.
- (b) Laat zien dat $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ wel samenhangend is.
- (c) Concludeer dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ en $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ niet homeomorf zijn.
- (d) Leid uit (c) af dat \mathbf{R} en \mathbf{R}^2 niet homeomorf zijn.

- 80.** Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ continue afbeeldingen zodanig dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Bewijs dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2: [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{als } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

continu is. (Dit laat zien dat wegen aaneengeschaakeld kunnen worden: als er een weg van x naar y en een weg van y naar z bestaan, dan bestaat er een weg van x naar z .)

- 81.** Laat zien dat de volgende topologische ruimten wegsamenhangend zijn:

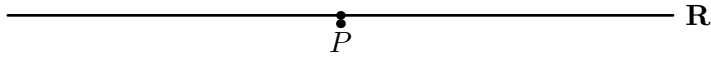
- (a) de ruimte $X = \{p, q\}$ voorzien van de topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$;
- (b) de eenheidscirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
- (c) de eenheidsbol $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

82. Zij X een topologische ruimte, en zijn $A, B \subseteq X$ wegsamenhangende deelverzamelingen zodanig dat $A \cap B$ niet-leeg is.
- (a) Is $A \cap B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
 - (b) Is $A \cup B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

83. Zij X de verzameling $\mathbf{R} \cup \{P\}$ (met $P \notin \mathbf{R}$) voorzien van de topologie \mathcal{T} waarvan een basis \mathcal{B} gegeven wordt door

$$\mathcal{B} = \{U \mid U \text{ is open in } \mathbf{R}\} \cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{P\} \mid U \text{ is een open omgeving van } 0 \text{ in } \mathbf{R}\}.$$

Dit is een “lijn met een verdubbeld punt”:



- (a) Laat zien dat X geen Hausdorffruimte is.
 - (b) Laat zien dat X wegsamenhangend is.
84. (Vgl. Runde, 3.4.2 en 3.4.4.) Zijn X en Y topologische ruimten.
- (a) Bewijs dat $X \times Y$ wegsamenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn.
 - (b) Bewijs dat $X \times Y$ samenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn. (Aanwijzing: gebruik continue functies naar $\{0, 1\}$.)

85. Zij X een deelverzameling van \mathbf{R}^n . We zeggen dat X *convex* is als voor alle $x, y \in X$ het lijnsegment dat x en y verbindt in X bevat is, d.w.z. voor alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$(1 - t)x + ty \in X.$$

Zij \mathcal{C} een collectie convexe deelverzamelingen van \mathbf{R}^n .

- (a) Is $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
 - (b) Is $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
86. Zij X een deelverzameling van \mathbf{R}^n . We zeggen dat X *stervormig* is als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ en alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$x_0 + t(x - x_0) \in X.$$

- (a) Bewijs dat elke niet-lege convexe deelverzameling van \mathbf{R}^n stervormig is.
- (b) Geef een voorbeeld van een deelverzameling van \mathbf{R}^2 die wel stervormig, maar niet convex is.
- (c) Laat zien dat elke stervormige deelruimte van \mathbf{R}^n wegsamenhangend is.

87. Zij X een topologische ruimte die slechts eindig veel samenhangscomponenten heeft. Bewijs dat de samenhangscomponenten zowel open als gesloten zijn.
88. Beschrijf voor elk van de volgende topologische ruimten (met de voor de hand liggende topologie, tenzij anders vermeld) de samenhangscomponenten:
- (a) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$;
 - (b) een triviale (= chaotische) topologische ruimte X ;
 - (c) een discrete topologische ruimte X ;
 - (d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Z} \text{ of } y \in \mathbf{Z}\}$;
 - (e) \mathbf{C} met de co-eindige topologie (= Zariskitopologie; de gesloten verzamelingen zijn de eindige verzamelingen en \mathbf{C} zelf);
 - (f) \mathbf{Q} ;
 - (g) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;
 - (h) $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$.

Zijn deze samenhangscomponenten tevens de wegsamenhangscomponenten?

89. Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte, en zij $Y \subseteq X$ een deelruimte. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
- (1) Y is een vereniging van samenhangscomponenten van X ;
 - (2) er bestaat een continue functie $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in Y \\ 1 & \text{als } x \notin Y. \end{cases}$$

90. (Runde, 3.4.12.) Laat zien dat de samenhangende topologische ruimte

$$X = \{(x, \sin(1/x) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

niet lokaal samenhangend is.

91. Zij X een topologische ruimte, en zij \mathcal{F} de verzameling van alle continue functies $f: X \rightarrow \{0, 1\}$, waarbij $\{0, 1\}$ de discrete topologie heeft. Zij \sim_q de relatie op X gedefinieerd als volgt: $x \sim_q y$ dan en slechts dan als voor alle $f \in \mathcal{F}$ geldt $f(x) = f(y)$.

- (a) Laat zien dat \sim_q een equivalentierelatie op X is.

Een *quasicomponent* van X (resp. de *quasicomponent van* $x \in X$) is een equivalentieklasse van \sim_q (resp. de klasse die x bevat).

- (b) Zij $x \in X$. Zij P_x de wegsamenhangscomponent van x , zij C_x de samenhangscomponent van x , en zij Q_x de quasicomponent van x . Bewijs dat $P_x \subseteq C_x \subseteq Q_x$.

Een topologische ruimte (X, \mathcal{T}) heet *totaal onsamenvhangend* als elke samenhangscomponent van (X, \mathcal{T}) uit slechts één punt bestaat, d.w.z. als voor alle $x \in X$ de samenhangscomponent van x gelijk is aan $\{x\}$.

- 92.** Bewijs dat de onderstaande topologische ruimten totaal onsamenvhangend zijn:
- (a) elke discrete topologische ruimte;
 - (b) \mathbf{Q} met de deelruimtetopologie van \mathbf{R} ;
 - (c) $\prod_{n \geq 1} \{0, 1\}$ met de producttopologie ($\{0, 1\}$ heeft de discrete topologie).
- 93.** (Runde, 3.4.9.) Zijn X en Y topologische ruimten met X samenhangend en Y totaal onsamenvhangend. Bewijs dat elke continue afbeelding $X \rightarrow Y$ constant is.
- 94.** Zij (X, \mathcal{T}) een topologische ruimte. Stel dat er voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ een continue functie $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ bestaat die voldoet aan $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$. Laat zien dat (X, \mathcal{T}) een totaal onsamenvhangende Hausdorffruimte is.
- 95.** Zij Y de deelruimte $\{1/n \mid n \in \{1, 2, 3, \dots\}\} \cup \{0, P\}$ van de lijn met een verdubbeld punt (de topologische ruimte X uit opgave 83).
- (a) Laat zien dat Y totaal onsamenvhangend is.
 - (b) Laat zien dat Y een quasicomponent heeft die uit twee punten bestaat.

De *Cantorverzameling* is een topologische deelruimte $C \subset \mathbf{R}$ die als volgt gedefinieerd is. We schrijven

$$C_1 = [0, 1], \quad C_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

$$C_3 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1],$$

enzovoorts; C_{n+1} wordt steeds gemaakt door uit elk van de intervallen waaruit C_n bestaat het (open) middelste derde deel weg te laten. Vervolgens definiëren we C als de doorsnede van alle C_n voor $n \geq 1$. De verzamelingen C_1, C_2, \dots, C_7 zijn hieronder weergegeven.



- 96.** Zij $C \subset \mathbf{R}$ de Cantorverzameling. In deze opgave bestuderen we eigenschappen van C .
- (a) Laat zien dat C compact is.
 - (b) Laat zien dat C totaal onsamenvhangend is.

- (c) Laat zien dat het inwendige van C in \mathbf{R} leeg is.
- (d) Laat zien dat C gelijk is aan de verzameling reële getallen die geschreven kunnen worden als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ met $a_n \in \{0, 2\}$ voor alle $n \geq 1$.
- (e) Leid uit (d) af dat C dezelfde kardinaliteit als \mathbf{R} heeft.

97. Zij $X = \prod_{n \geq 1} \{0, 2\}$, waar $\{0, 2\}$ de discrete topologie heeft en X de producttopologie. Het doel van deze opgave is om te laten zien dat C en X homeomorf zijn.

- (a) Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C \\ (a_n)_{n \geq 1} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \end{aligned}$$

continu en bijectief is.

- (b) Leid uit (a) af dat C en X homeomorf zijn. (Aanwijzing: C en X zijn compacte Hausdorffruimten.)

98. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X wegsamenhangend is dan en slechts dan als elk tweetal afbeeldingen van de eenpuntruimte $\{0\}$ naar X homotoop is.

99. Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte. Laat zien dat elk tweetal wegen $[0, 1] \rightarrow X$ homotoop is. (Aanwijzing: elke weg in X is homotoop met een constante weg.)

100. (a) Laat zien dat de twee afbeeldingen $f, g: \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z) = z \quad \text{en} \quad g(z) = z/|z|$$

homotoop zijn.

- (b) Idem voor de twee afbeeldingen $f, g: \mathbf{C}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{en} \quad g(z) = 1/z.$$

101. Zij X een topologische ruimte, zij $n \geq 0$, en zij $f: \mathbf{R}^n \rightarrow X$ een continue afbeelding. Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding $\mathbf{R}^n \rightarrow X$.

Gegeven twee topologische ruimten X en Y schrijven we $C(X, Y)$ voor de verzameling van alle continue afbeeldingen $X \rightarrow Y$. In het college is bewezen dat de homotopierelatie \sim op $C(X, Y)$ een equivalentierelatie is. De verzameling van *homotopieklassen van continue afbeeldingen van X naar Y* , notatie $H(X, Y)$, is gedefinieerd als de quotiëntverzameling

$$H(X, Y) = C(X, Y)/\sim.$$

Voor $f \in C(X, Y)$ noteren we de klasse van f in $H(X, Y)$ met $\langle f \rangle$.

102. Zijn X , Y en Z topologische ruimten. Stel dat $f, f' \in C(X, Y)$ en $g, g' \in C(Y, Z)$ afbeeldingen zijn die voldoen aan $f \sim f'$ en $g \sim g'$.

(a) (Runde, 5.1.2.) Bewijs dat de afbeeldingen $g \circ f$ en $g' \circ f'$ in $C(X, Z)$ voldoen aan $g \circ f \sim g' \circ f'$.

(b) Bewijs dat er een unieke afbeelding

$$H(Y, Z) \times H(X, Y) \xrightarrow{*} H(X, Z)$$

van verzamelingen bestaat zodanig dat voor alle $f \in C(X, Y)$ en $g \in C(Y, Z)$ geldt

$$\langle g \rangle * \langle f \rangle = \langle g \circ f \rangle.$$

103. Zij X een deelruimte van \mathbf{R}^n , en zij $x_0 \in X$ zodanig dat voor alle $x \in X$ en alle $t \in [0, 1]$ geldt $x_0 + t(x - x_0) \in X$. (Met andere woorden, X is een stervormige deelruimte van \mathbf{R}^n ; zie opgave 86.)

(a) Zij Y een topologische ruimte. Laat zien dat elke continue afbeelding $Y \rightarrow X$ homotoop is met de constante afbeelding $Y \rightarrow X$ met beeld $\{x_0\}$.

(b) Bewijs dat elke lus $\gamma \in P(X; x_0)$ weghomotoop is met de constante lus $t \mapsto x_0$.

(c) Laat zien dat voor elke $x \in X$ de fundamentealgroep $\pi_1(X, x)$ triviaal is.

104. Zij S^1 de eenheidscirkel $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Beschrijf een surjectieve afbeelding $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ die (gezien als weg in S^1) weghomotoop is met de constante weg $[0, 1] \rightarrow S^1$ met beeld $\{(1, 0)\}$.

105. (vgl. Runde, 5.1.6.) Zij X een topologische ruimte, zij Y een wegsamenhangscomponent van X , en zij $x_0 \in Y$. Laat zien dat de inclusie $Y \hookrightarrow X$ een isomorfisme

$$\pi_1(Y, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$$

van fundamentealgroepen induceert.

106. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zij $\alpha \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. Bewijs dat er tussen de fundamentealgroepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ een groepsisomorfisme

$$\phi_\alpha: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$$

bestaat dat voor elke weg $\gamma \in P(X; x_0)$ de klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ afbeeldt op de klasse $[\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha] \in \pi_1(X, x_1)$.

- 107.** (Runde, 5.2.1.) Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Zij n een positief geheel getal. Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n: S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

een overdekkingsafbeelding is.

- 108.** Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten, zij $x \in X$, en zij $y = f(x)$.

- (a) Bewijs dat er een uniek groepshomomorfisme

$$f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

bestaat zodanig dat $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ voor alle $\gamma \in P(X; x)$.

- (b) Zij $g: Y \rightarrow Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z = g(y)$. Bewijs dat de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f_*: \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(Y, y), & g_*: \pi_1(Y, y) &\longrightarrow \pi_1(Z, z), \\ (g \circ f)_*: \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(Z, z) \end{aligned}$$

voldoen aan $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

- 109.** Zijn X en Y topologische ruimten, en zijn $x \in X$ en $y \in Y$.

- (a) Construeer een groepsisomorfisme van $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ naar $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. (Aanwijzing: gebruik de vorige opgave om een groepshomomorfisme te construeren, en laat vervolgens zien dat dit een inverse heeft.)

- (b) Concludeer dat de fundamentealgroep van $S^1 \times S^1$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

- 110.** (Runde, 5.2.2.) Zijn X en S topologische ruimten met S discreet en niet leeg. We definiëren een continue afbeelding $p: X \times S \rightarrow X$ door $p(x, s) = x$. Bewijs dat p een overdekkingsafbeelding is.

- 111.** Zij $f: Y \rightarrow X$ een continue afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- (1) f is een overdekkingsafbeelding;
- (2) voor elke $x \in X$ is er een open omgeving U van x in X zodanig dat $f|_V: V \rightarrow U$ een overdekkingsafbeelding is, waarbij $V = f^{-1}U$.

- 112.** (vgl. Runde, 5.2.3.) Zij $f: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding zodanig dat voor elke $x \in X$ de verzameling $f^{-1}\{x\}$ eindig is. We definiëren een functie $d: X \rightarrow \mathbf{Z}$ door $d(x) = \#(f^{-1}\{x\})$.

- (a) Zij $x \in X$. Bewijs dat er een open omgeving U van x in X bestaat zodanig dat voor alle $x' \in U$ geldt $d(x') = d(x)$.
- (b) Laat zien dat voor elke $n \in \mathbf{Z}$ de verzameling $\{x \in X \mid d(x) = n\}$ zowel open als gesloten is.
- (c) Stel dat X samenhangend is. Laat zien dat de functie $d: X \rightarrow \mathbf{Z}$ constant is.

113. Zij $f: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding.

- (a) Stel dat X een Hausdorffruimte is. Bewijs dat Y een Hausdorffruimte is.
- (b) Stel dat Y een Hausdorffruimte is en dat voor elke $x \in X$ de deelverzameling $f^{-1}\{x\} \subseteq Y$ eindig is. Bewijs dat X een Hausdorffruimte is.

Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat de constante afbeelding $f_0: X \rightarrow X$ met beeld $\{x_0\}$ homotoop is met de identiteit op X .

114. Zij X een samentrekbare topologische ruimte.

- (a) Laat zien dat X wegsamenhangend is.
- (b) Laat zien dat $\pi_1(X, x)$ voor elke $x \in X$ de triviale groep is. (Aanwijzing: reduceer naar het geval $x = x_0$ met x_0 als in de definitie van samentrekbaarheid.)

115. We bekijken we de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0, 1)$.

- (a) Zij $p \in S^2$. Laat zien dat $S^2 \setminus \{p\}$ samentrekbaar is. (Aanwijzing: reduceer naar een situatie waarin p “makkelijke” coördinaten heeft.)
- (b) Zij $\gamma \in P(S^2; x_0)$ een lus met basispunt x_0 . Neem aan dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{x_0\}$.

116. In deze opgave bewijzen we dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

- (a) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Zij $p \in S^2 \setminus \{x_1, x_2\}$. Stel dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met een weg die niet door p gaat. (Aanwijzing: gebruik de vorige opgave.)
- (b) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Bewijs dat γ weghomotoop is met een niet-surjectieve weg. (Aanwijzing: gebruik

lemma 21.1 met een geschikte open overdekking van S^2 , en pas vervolgens (a) toe op de resulterende “deelwegen” $\gamma: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow S^2$, met $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ en $p \in S^2 \setminus \{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)\}$.)

- (c) Bewijs dat elke lus in S^2 met basispunt x_0 weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{x_0\}$. (Aanwijzing: gebruik (b) en de vorige opgave.)
- (d) Concludeer dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

117. Zij X de “ ∞ -vormige” deelruimte van \mathbf{R}^2 gedefinieerd door

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0)$. We bekijken de lussen $\gamma_1, \gamma_{-1} \in P(X; x_0)$ met basispunt x_0 gedefinieerd door

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &= (1 - \cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \\ \gamma_{-1}(s) &= (\cos(2\pi s) - 1, \sin(2\pi s)).\end{aligned}$$

- (a) Laat zien dat er een overdekkingsafbeelding $p: Y \rightarrow X$ en een $y \in Y_0$ bestaan zodanig dat de lifts van $\gamma_1 \odot \gamma_{-1}$ en $\gamma_{-1} \odot \gamma_1$ naar Y met beginpunt y_0 verschillende eindpunten hebben. (Aanwijzing: dit is mogelijk met een $p: Y \rightarrow X$ zodanig dat $p^{-1}\{x\}$ uit drie punten bestaat voor elke $x \in X$.)
- (b) Leid uit (a) af dat de fundamentealgroep $\pi_1(X, x_0)$ niet abels is.

118. Zij $p: Y \rightarrow X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y \in Y$. Bewijs dat de afbeelding $p_*: \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, p(y))$ injectief is.

119. Zij n een positief geheel getal.

- (a) Zij $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ de open eenheidsbal in \mathbf{R}^n . Beschrijf een continue afbeelding $B^n \rightarrow B^n$ zonder dekpunten.
- (b) Zij $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ de n -dimensionale eenheidsbol. Beschrijf een continue afbeelding $S^n \rightarrow S^n$ zonder dekpunten.

120. Zij $D^1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leq 1\}$. Bewijs dat elke continue afbeelding $f: D^1 \rightarrow D^1$ een dekpunt heeft.

121. Zij $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ een continue afbeelding. Bewijs dat er $\lambda > 0$ en $x \in \mathbf{R}^2$ bestaan zodanig dat $f(x) = \lambda x$.

122. Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Bekijk voor $n \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n: S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Hoe ziet het geïnduceerde groepshomomorfisme

$$(f_n)_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

eruit onder de identificatie van $\pi_1(S^1, 1)$ met \mathbf{Z} ?

123. Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X , en zij $x \in X$. Zij $r: X \rightarrow Y$ een retractie van X op Y .

- (a) Neem aan dat x in Y ligt. Laat zien dat de afbeelding $r_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, r(x))$ surjectief is.
- (b) Geldt de uitspraak in (a) ook zonder de aanname dat x in Y ligt? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

124. (a) Bekijk de deelruimten $Y \subset X \subset \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}, \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x+1)^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Laat zien dat de inclusie $i: Y \rightarrow X$ een homotopie-equivalentie is.

- (b) Zijn $p, q, r \in \mathbf{R}^2$ drie verschillende punten. Bewijs dat de fundamentealgroep $\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{q, r\}, p)$ niet abels is. (Aanwijzing: gebruik opgave 117.)
- 125.** (a) Gegeven zijn twee topologische ruimten X en Y en vier continue afbeeldingen $f, f': X \rightarrow X$ en $g, g': Y \rightarrow Y$ zodanig dat f homotoop is met f' , en g met g' . We definiëren twee afbeeldingen $h, h': X \times Y \rightarrow X \times Y$ door $h(x, y) = (f(x), g(y))$ en $h'(x, y) = (f'(x), g'(y))$. Bewijs dat h en h' continu zijn en homotoop met elkaar zijn.
- (b) Zijn X_1, X_2, Y_1 en Y_2 topologische ruimten zodanig dat X_1 homotopie-equivalent is met X_2 , en Y_1 met Y_2 . Bewijs dat $X_1 \times Y_1$ homotopie-equivalent is met $X_2 \times Y_2$.

126. Beschouw in \mathbf{R}^3 de cirkel C en de lijn Z gegeven door

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}, \\ Z &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Definieer $X = \mathbf{R}^3 \setminus (C \cup Z)$, en zij $x \in X$. Laat zien dat de fundamentealgroep $\pi_1(X, x)$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

127. Zij $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ de eenheidsbol, en zij \sim de relatie op S^2 gedefinieerd door

$$x \sim y \iff x = y \text{ of } x = -y.$$

(a) Laat zien dat \sim een equivalentierelatie is.

Het *reële projectieve vlak* is de ruimte $P = S^2/\sim$ voorzien van de quotiënt-topologie (zie opgave 55).

(b) Laat zien dat de quotiëntafbeelding $q: S^2 \rightarrow P$ een overdekkingsafbeelding is.

(c) Zij $p \in P$. Laat zien dat de fundamentealgroep $\pi_1(P, p)$ orde 2 heeft.