Uitwerkingen Hertentamen Topologie, 29 juni 2017

Steve Alberts

22 december 2017

Exercise 1 *Gegeven zijn de volgende metrische deelruimten van* $\mathbb{R}^2$ *met de euclidische metriek* d*:*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0)) < 1\},$$

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq d((x,y),(0,0)) \leq 3\},$$

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) = d((x,y),(0,-1))\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, compact, enkelvoudig samenhangend.

Solution:

De antwoorden staan in de volgende tabel:

	Open	Compact	Enkelvoudig samenhangend
X	Ja	Nee	Ja
Y	Nee	Ja	Nee
Z	Nee	Nee	Ja

Verklaring (niet nodig op het tentamen): X is de open bol met straal 1 om $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Deze is per definitie open. Verder is X niet gesloten, daardoor kan die niet compact zijn. Wel is X samentrekbaar, en daardoor ook enkelvoudig samenhangend.

We zien dat Y een annulus in $\mathbb{R}^2$ is, deze is niet open, maar wel gesloten. Ook is Y begrensd, en daardoor is die compact. Tenslotte is Y homotopie-equivalent met de cirkel, en daarom niet enkelvoudig samenhangend.

De punten die op dezelfde afstand van twee gegeven punten liggen, vormen per definitie de middelloodlijn tussen die twee punten. Daardoor is Z niet open, Z is ook niet begrensd en dus niet compact. Omdat Z homeomorf is met $\mathbb{R}$, is die wel enkelvoudig samenhangend.

$\square$

Exercise 2 *Zij* X *een metrische ruimte, en zijn* Y *en* Z *twee metrische deelruimten van* X*. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.*

(a) *Als* Y *en* Z *rijcompact zijn, dan is* $Y \cup Z$ *rijcompact.*

(b) *Als Y en Z wegsamenhangend zijn, dan is $Y \cup Z$ wegsamenhangend.*
(c) *Als Y en Z begrensd zijn, dan is $Y \cup Z$ begrensd.*

Solution:

(a) Twee mogelijke strategieën: de eerste strategie is de definitie gebruiken. Gegeven een rij (a_n) in $Y \cup Z$, moeten er oneindig veel termen in Y of oneindig veel termen in Z liggen. Dit geeft een deelrij (a_{n_k}) van (a_n) die bevat is in Y of in Z. Rijcompactheid van Y en Z geeft nu een convergente deelrij van (a_{n_k}), die ook een deelrij is van (a_n).
De tweede aanpak is door te gebruiken dat compact en rijcompact equivalent zijn voor metrische ruimten. Omdat de vereniging van twee compacta weer compact is, geldt hetzelfde voor rijcompacte ruimten.

(b) Dit is alleen waar als er een punt in $Y \cap Z$ ligt, dan kun je zo'n punt als 'verbindingspunt' tussen punten uit Y en Z gebruiken. Als die doorsnede leeg is, dan lukt dit niet. Een tegenvoorbeeld zijn de intervallen $Y = (-1, 0)$ en $Z = (0, 1)$ in $X = \mathbb{R}$, of $Y = \{0\}$ en $Z = \{1\}$. Vele varianten werken.

(c) Dit is waar: per definitie bestaan er reële getallen $M, N > 0$ zo dat voor alle $y, y' \in Y$ geldt $d(y, y') < M$ en voor alle $z, z' \in Z$ geldt $d(z, z') < N$. We moeten bewijzen dat de afstand tussen punten uit Y en Z ook begrensd is. Als Y of Z leeg is, dan hoeven we niets te doen. Dus neem aan dat dit niet het geval is en kies punten $y_0 \in Y$ en $z_0 \in Z$. Laat $R := d(y_0, z_0)$. Dan geldt voor alle $y \in Y, z \in Z$ dat

$$d(y, z) \leq d(y, y_0) + d(y_0, z_0) + d(z_0, z) < M + R + N,$$

en hieruit zien we dat $Y \cup Z$ begrensd is (want deze grens werkt ook voor twee punten uit Y of twee punten uit Z).

$\square$

Exercise 3 *Voor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ schrijven we $U_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a$ en $y > b\}$. Zij $\mathcal{T}$ de collectie van alle deelverzamelingen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ zodanig dat U te schrijven is als (mogelijk oneindige) vereniging van verzamelingen van de vorm $U_{a,b}$ met $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

(a) *Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbb{R}^2$ is.*
(b) *Geef (met bewijs) aan of de topologische ruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ compact is.*
(c) *Geef (met bewijs) aan of $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is.*

Solution:

(a) Allereerst merken we op dat een lege vereniging van de $U_{a,b}$ de lege verzameling oplevert, dus $\varnothing \in \mathcal{T}$. Verder kunnen we $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} U_{a,b}$ schrijven, dus $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$.
Om te bewijzen dat $\mathcal{T}$ gesloten is onder eindige doorsnijdingen, merken we eerst op dat gegeven $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, we $U_{a,b} \cap U_{c,d}$ kunnen schrijven als $U_{e,f}$ voor $e, f \in \mathbb{R}$: neem $e = \max\{a, c\}$ en $f = \max\{b, d\}$. Er geldt namelijk

$$U_{a,b} \cap U_{c,d} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > a \wedge x > c) \wedge (y > b \wedge y > d)\}.$$

Dit betekent precies dat $x > \max\{a, c\}$ en dat $y > \max\{b, d\}$.
Stel nu dus dat $U, V \in \mathcal{T}$. Dan zijn U en V te schrijven als vereniging van $U_{a,b}$'s, zeg dat

$$U = \bigcup_{(a,b)\in A} U_{a,b},\ V = \bigcup_{(c,d)\in B} U_{c,d},$$

met A en B deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$. Dan geldt

$$U \cap V = \left(\bigcup_{(a,b)\in A} U_{a,b} \right) \cap \left(\bigcup_{(c,d)\in B} U_{c,d} \right) = \bigcup_{(a,b)\in A, (c,d)\in B} U_{a,b} \cap U_{c,d}.$$

Met het hierboven besproken zien we dat dit weer een vereniging van verzamelingen van de vorm $U_{e,f}$ is, en daarmee volgt $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Tenslotte moeten we laten zien dat $\mathcal{T}$ gesloten is onder willekeurige verenigingen: maar als een collectie U_i met i in een indexverzameling I te schrijven is als een vereniging van $U_{a,b}$, zeg

$$U_i = \bigcup_{(a,b)\in A_i} U_{a,b},$$

dan is de vereniging van de U_i's te schrijven als

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{(a,b)\in \bigcup_{i\in I} A_i} U_{a,b}.$$

(Oftewel: een vereniging van een vereniging is weer te schrijven als een vereniging).
Hiermee kunnen we concluderen dat $\mathcal{T}$ een topologie is op $\mathbb{R}^2$.

(b) Beschouw de open overdekking

$$\mathcal{U} = \{U_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

van $\mathbb{R}^2$. Deze overdekking kan geen eindige deeloverdekking hebben. Gegeven een eindige deelverzameling $\mathcal{V}$ van $\mathcal{U}$, kunnen we een minimale a en een minimale b vinden. Dat wil zeggen, er is een kleinste $a \in \mathbb{R}$ waarvoor er een y is met $U_{a,y} \in \mathcal{V}$, en er is een kleinste b waarvoor een x is met $U_{x,b} \in \mathcal{V}$. Dan is $\bigcup V = U_{a,b}$ voor die a, b, en dat is nooit gelijk aan heel $\mathbb{R}^2$. Dus $\mathcal{U}$ heeft geen eindige deeloverdekking en dus kan $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ niet compact zijn.

(c) Bekijk bijvoorbeeld $(0, 0), (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Stel dat U een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^2$ met $(0, 0) \in U$. Per definitie is U te schrijven als een vereniging van $U_{a,b}$'s. In het bijzonder zijn er $a, b \in \mathbb{R}$ zo dat $(0, 0) \in U_{a,b} \subseteq U$. Per definitie volgt $0 > a$ en $0 > b$. Maar dan geldt dus ook $1 > a$ en $1 > b$, oftewel $(1, 1) \in U_{a,b} \subseteq U$. We vinden dus dat elke open deelverzameling van $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ die $(0, 0)$ bevat, automatisch ook $(1, 1)$ bevat, dus deze twee punten kunnen niet gescheiden worden door open deelverzamelingen. Dus $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ is niet Hausdorff.

$\square$

Exercise 4 *Zij $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ met de gebruikelijke topologie.*

(a) Zij $f : X \to X$ de continue afbeelding $z \mapsto -z$. Geef een homotopie tussen f en de identiteit op X.

Zij $x_0 = 1 \in X$, en zij $\pi_1(X, x_0)$ de fundamentaalgroep van X met basispunt x_0. Definieer een continue afbeelding $g : X \to X$ door $g(z) = z^2$; merk op dat $g(x_0) = x_0$.

(b) Zij $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ de klasse van de weg $\gamma : [0,1] \to X$ gegeven door $t \mapsto \exp(2\pi it)$. Laat zien dat de elementen $g_*([\gamma])$ en $[\gamma]\cdot[\gamma]$ van $\pi_1(X, x_0)$ gelijk zijn.

(c) Leid uit (b) af dat g niet homotoop is met de identiteit op X.

Solution:

(a) We kunnen elke $x \in X$ schrijven als $x = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ voor unieke $r > 0$ en $\theta \in [0, 2\pi)$. Voor zo'n x geldt dan

$$-x = -r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r(\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)) = r \cdot e^{i(\pi+\theta)}.$$

De homotopie die we geven zal over het tijdsinterval $[0, 1]$ de halve cirkel van x naar $-x$ aflopen, en die noteren we in deze poolcoördinaten. We definiëren

$$F : [0,1] \times X \to X,$$
$$(t, re^{i\theta}) \mapsto re^{i(\theta+t\pi)}.$$

Deze afbeelding is samengesteld door continue afbeeldingen, daardoor is die continu. Invullen geeft dat $F(0, -) = \mathrm{id}_X$ en $F(1, -) = f$.

(b) Per definitie geldt $g_*([\gamma]) = [g \circ \gamma]$. Verder is $g \circ \gamma$ gegeven door $t \mapsto (\exp(2\pi it))^2 = \exp(4\pi it)$. Ook geldt $[\gamma]\cdot[\gamma] = [\gamma \odot \gamma]$, met $\gamma \odot \gamma$ gegeven door

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \le 1/2 \\ \gamma(2t-1) & t \ge 1/2 \end{cases}.$$

Er voor $t \le 1/2$ geldt $\gamma(2t) = \exp(4\pi it)$ en voor $t \ge 1/2$ geldt

$$\gamma(2t-1) = \exp(2\pi i(2t-1)) = \exp(4\pi it - 2\pi i) = \exp(4\pi it).$$

Oftewel $(\gamma \odot \gamma)(t) = (g \circ \gamma)(t)$ voor alle $t \in [0,1]$. Hiermee zijn de afbeeldingen $\gamma \odot \gamma$ en $g \circ \gamma$ gelijk, en dus volgt

$$g_*([\gamma]) = [g \circ \gamma] = [\gamma \odot \gamma] = [\gamma]\cdot[\gamma].$$

(c) Als g homotoop zou zijn met id_X, dan zou gelden dat $g_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Met (b) zou dan volgen dat $[\gamma]\cdot[\gamma] = [\gamma]$. Dit geeft dat γ homotoop is met het constante pad. Maar dit is niet het geval, dus volgt dat g niet homotoop kan zijn met id_X.

$\square$

Exercise 5

(a) Definieer het begrip overdekkingsafbeelding tussen topologische ruimten.

(b) *Zijn X en Y topologische ruimten, en zij $p : Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Zij S een topologische deelruimte van X, en zij T de deelruimte $p^{-1}S$ van Y . Bewijs dat $p|_T : T \to S$ (d.w.z. de beperking van p tot T, gezien als continue afbeelding van T naar S) een overdekkingsafbeelding is.*

Solution:

(a) Laat X, Y topologische ruimten. Een continue afbeelding $p : Y \to X$ is een overdekkingsafbeelding als p surjectief is, en voor alle $x \in X$ is er een open omgeving U van x, zo dat $p^{-1}(U)$ een disjuncte vereniging is van open deelverzamelingen $V \subseteq Y$ waarvoor geldt dat $p|_V$ een homeomorfisme $V \to U$ is.

(b) Allereerst merken we op dat $p|_T$ surjectief is omdat p dat is: gegeven $s \in S$, is er een $y \in Y$ met $p(y) = s$. Deze y ligt dan per definitie in $p^{-1}(S) = T$.
Laat $s \in S$ gegeven zijn. Dan is er omdat p een overdekkingsafbeelding is een open omgeving $U_X \subseteq X$ van s, met de in (a) beschreven eigenschap. We zoeken een open omgeving van s in S, dus we bekijken $U := U_X \cap S$. Dit is een open deelverzameling van S, en bevat s.
Nu is

$$(p|_T)^{-1}(U) = (p|_T)^{-1}(U_X \cap S) = (p|_T)^{-1}(U_X) \cap (p|_T)^{-1}(S).$$

Merk op dat $p|_T$ alleen maar in S afbeeldt, dus $(p|_T)^{-1}(S) = T$. Verder is $(p|_T)^{-1}(U_X) = p^{-1}(U_X) \cap T$. Nu kunnen we gebruiken dat $p^{-1}(U_X)$ te schrijven is als een vereniging van bladen: er is een indexverzameling I, en disjuncte open verzamelingen V_i voor $i \in I$, zo dat $p^{-1}(U_X) = \bigcup_{i \in I} V_i$ en $p|_{V_i}$ een homeomorfisme $V_i \to U_X$ is voor elke i. Er geldt dus ook dat

$$(p|_T)^{-1}(U) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap T = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap T).$$

De verzamelingen $V_i \cap T$ zijn allen open in T. Verder zijn ze ook nog steeds disjunct. Tenslotte is de beperking van $p|_{V_i}$ tot $V_i \cap T$, gezien als afbeelding $V_i \cap T \to U$ continu, open en bijectief vanwege de definitie van de deelruimte topologie. Hiermee is U de gezochte omgeving van s, en dus is $p|_T$ een overdekkingsafbeelding.

$\square$