TENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 13 juni 2017, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $\min\{10, 1 + (\text{aantal punten})/10\}$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(15 pt) **1.** In $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \qquad Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} = 1\},$$
$$Z = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0,\infty)\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, gesloten, compact, wegsamenhangend, samentrekbaar.

(18 pt) **2.** Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen metrische ruimten. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Als Y begrensd is, dan is X begrensd.

(b) Als X rijcompact is, dan is $f(X)$ rijcompact.

(c) Als X volledig is, dan is $f(X)$ volledig.

(20 pt) **3.** Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding van verzamelingen. We schrijven $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(Y)$ voor de machtsverzamelingen van X respectievelijk Y.

(a) Zij $\mathcal{T}_Y$ een topologie op Y. Bewijs dat $\mathcal{T}'_X = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{T}_Y\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ een topologie op X is en dat $f\colon (X, \mathcal{T}'_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continu is.

(b) Zij $\mathcal{T}_X$ een topologie op X. Bewijs dat $\mathcal{T}'_Y = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}V \in \mathcal{T}_X\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ een topologie op Y is en dat $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}'_Y)$ continu is.

(15 pt) **4.** Zij X een topologische ruimte, zij $n \geq 1$, en zijn $S_1, S_2, \ldots, S_n$ deelruimten van X waarvoor geldt $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = X$. Neem aan dat voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de ruimte S_i wegsamenhangend is en dat voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ de doorsnede $S_i \cap S_{i+1}$ niet-leeg is. Bewijs dat X wegsamenhangend is.

(18 pt) **5.** Een (niet noodzakelijk continue) afbeelding $f\colon X \to Y$ tussen topologische ruimten heet *proper* als voor elke compacte deelruimte K van Y de deelruimte $f^{-1}K$ van X compact is.

(a) Geef een voorbeeld van een overdekkingsafbeelding tussen topologische ruimten die niet proper is.

(b) Stel dat X een Hausdorffruimte is en dat Y een compacte topologische ruimte is. Bewijs dat elke propere afbeelding $f\colon X \to Y$ continu is.

(20 pt) **6.** (a) Zijn X en Y twee topologische ruimten zodanig dat Y samentrekbaar is. Bewijs dat de productruimte $X \times Y$ homotopie-equivalent is met X.

(b) Bekijk de topologische ruimten $\mathbf{C}$ en $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (met de gebruikelijke topologie). Bepaal de fundamentaalgroep van $\mathbf{C} \times D$ met betrekking tot het basispunt $(0, 1)$.

Succes!