HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 16 april 2019, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Je mag resultaten van deelopgaven gebruiken in latere deelopgaven.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(16 pt) **1.** In $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$W = (0,1) \times (0,1), \qquad Y = \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2,$$
$$X = \mathbf{Z}^2, \qquad Z = \{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(\cos(1/y), y) \mid y > 0\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open in $\mathbf{R}^2$, volledig, samenhangend, enkelvoudig samenhangend.

(20 pt) **2.** Zij V de $\mathbf{R}$-vectorruimte van continue functies $[0,1] \to \mathbf{R}$. We definiëren twee normen $\|\ \|_1, \|\ \|_\infty \colon V \to \mathbf{R}$ door $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ en $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

(a) Zij $(g_n)_{n \geq 0}$ een rij in V die convergeert naar een zekere $g \in V$ met betrekking tot (de metriek gedefinieerd door) de norm $\|\ \|_\infty$. Bewijs dat voor elke $x \in [0,1]$ de rij $(g_n(x))_{n \geq 0}$ in $\mathbf{R}$ naar $g(x)$ convergeert.

(b) Zij $(f_n)_{n \geq 0}$ de rij in V gegeven door $f_n(x) = x^n$. Bewijs dat deze rij convergeert met betrekking tot de norm $\|\ \|_1$, maar niet met betrekking tot de norm $\|\ \|_\infty$.

(16 pt) **3.** Zijn X en Y twee topologische ruimten.

(a) Neem aan dat X en Y Hausdorffruimten zijn. Bewijs dat de productruimte $X \times Y$ een Hausdorffruimte is.

(b) Neem aan dat $X \times Y$ een Hausdorffruimte is en dat Y niet leeg is. Bewijs dat X een Hausdorffruimte is.

(18 pt) **4.** Zij X een topologische ruimte, en zij $f \colon X \to X$ een continue afbeelding. Neem aan dat er een geheel getal $n > 0$ bestaat zodanig dat f^n de identiteit op X is; hier is $f^n \colon X \to X$ gedefinieerd door $f^n(x) = f(f(\cdots f(x) \cdots))$ (n keer).

(a) Laat zien dat f een homeomorfisme is.

(b) Zij $C \subseteq X$ een compacte deelruimte. Laat zien dat er een compacte deelruimte $D \subseteq X$ bestaat die voldoet aan $C \subseteq D$ en $f(D) = D$.

(20 pt) **5.** (a) Zij X een topologische ruimte, en zijn $h_0, h_1 \colon X \to X$ twee continue afbeeldingen die homotoop met elkaar zijn. Laat zien dat er voor elke $x \in X$ een weg van $h_0(x)$ naar $h_1(x)$ bestaat.

(b) Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zijn $f \colon X \to Y$ en $g \colon Y \to X$ continue afbeeldingen zodanig dat $g \circ f \colon X \to X$ homotoop is met de identiteit op X. Stel dat Y wegsamenhangend is. Laat zien dat X wegsamenhangend is.

(16 pt) **6.** Bekijk de topologische ruimte $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{Z}\}$. Bepaal (met onderbouwing) voor elke $x_0 \in X$ de fundamentaalgroep van X met basispunt x_0.

Succes!