

TENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 13 januari 2020, 14:15–17:15

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

- (15 pt) 1. In $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ of } x^2 + (y - 3)^2 = 1\},$$

$$Y = \{(t, t \cos t) \mid t \in \mathbf{R}\}, \quad Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \notin \mathbf{Q} \text{ of } y \notin \mathbf{Q}\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: gesloten, dicht, rijcompact, samenhangend, enkelvoudig samenhangend.

- (18 pt) 2. Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde $\mathbf{R}$ -vectorruimte.

- (a) Bewijs dat V (gezien als metrische ruimte met de metriek gedefinieerd door $\|\cdot\|$) compact is dan en slechts dan als $V = \{0\}$.
- (b) Zij $\|\cdot\|'$ een norm op V die equivalent is met $\|\cdot\|$. Stel dat $(V, \|\cdot\|)$ een Banachruimte is. Bewijs dat $(V, \|\cdot\|')$ ook een Banachruimte is.

- (16 pt) 3. Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zij T een topologische deelruimte van Y .

- (a) Bewijs de inclusie $f^{-1}(T^\circ) \subseteq (f^{-1}T)^\circ$; hier is T° (resp. $(f^{-1}T)^\circ$) het inwendige van T in Y (resp. van $f^{-1}T$ in X).
- (b) Laat met een voorbeeld zien dat in het algemeen niet geldt $f^{-1}(T^\circ) = (f^{-1}T)^\circ$.

- (18 pt) 4. (a) Zij I een verzameling, en zij X_i voor elke $i \in I$ een Hausdorffruimte. Bewijs dat de productruimte $X = \prod_{i \in I} X_i$ een Hausdorffruimte is.

- (b) Geef (met onderbouwing) een voorbeeld van topologische ruimten X, Y en een surjectieve continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ waarbij X wel een Hausdorffruimte is, maar Y niet.

- (20 pt) 5. Voor een topologische ruimte X schrijven we $S(X)$ voor de verzameling van wegsamenhangscomponenten van X . Voor een punt $x \in X$ schrijven we $[x] \in S(X)$ voor de wegsamenhangscomponent waar x in ligt.

Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten.

- (a) Bewijs dat er een unieke (goed gedefinieerde) afbeelding

$$\bar{f}: S(X) \rightarrow S(Y)$$

van verzamelingen bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$\bar{f}([x]) = [f(x)].$$

- (b) Stel dat f een homotopie-equivalentie is. Bewijs dat $\bar{f}$ een bijectie is.

- (18 pt) 6. Bepaal (met onderbouwing) van elk van de volgende topologische ruimten de fundamenteaalgroep.

- (a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \{0, 1, 4\}\}$ met basispunt $(0, 2)$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$ met basispunt $(0, 1, 1)$.

Succes!