UITWERKING 1E DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE
27-10-2011

1) a) $$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos 2\pi x}{(x-1)^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\pi \cdot \sin 2\pi x}{2(x-1)} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(2\pi)^2 \cos 2\pi x}{2} = \boxed{2\pi^2}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{e^{x}+1} - e^{x/2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{e^{x}+1} - e^{x/2}\right)\left(\sqrt{e^{x}+1} + e^{x/2}\right)}{\sqrt{e^{x}+1} + e^{x/2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}+1 - (e^{\frac{x}{2}})^2}{\sqrt{e^{x}+1} + e^{x/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}+1-e^{x}}{\sqrt{e^{x}+1} + e^{x/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{x}+1} + e^{x/2}} = \boxed{0}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+1}}{5x^2} \underset{x^2 = \sqrt{x^4}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{x^4+1}}{5\sqrt{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{5}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{5}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

2) a) $$\left\{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

b) $$\left(\frac{e^{\sin x}+1}{x^2+\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x^2+\sqrt{x})(e^{\sin x}+1)' - (e^{\sin x}+1)(x^2+\sqrt{x})'}{(x^2+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(x^2+\sqrt{x})(e^{\sin x} \cdot \cos x) - (e^{\sin x}+1) \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x^2+\sqrt{x})^2}.$$

3) f_c is continu voor $x>e$ (standaardfunctie) en voor $x<e$ (standaardfunctie). We moeten alleen nog nagaan voor welke waarden van ~~x~~ c f_c continu is in $x=e$; ~~dan~~ voor die waarden van c is f_c dan continu voor alle x.

Merk op dat f_c continu is in $x=e$ dan en slechts dan als $\lim_{x\downarrow e} f_c(x)=f_c(e)$, en $\lim_{x\uparrow e} f_c(x)=f_c(e)$

Er geldt: $f_c(e)= c\ln e + c^2 = c+c^2$

$\lim_{x\downarrow e} f_c(e)= c\ln e + c^2 = c+c^2$

$\lim_{x\uparrow e} f_c(e)= c+\cos\left(\frac{2\pi e}{e}\right) = c+\cos 2\pi = c+1.$

Dus f_c is continu in $x=e \iff c+c^2=c+1 \iff c^2=1 \iff \boxed{c=1 \text{ of } c=-1}$

4) Zij $f(x)=x^3+x-1$.

a) $f'(x)=3x^2+1>0$ voor alle $x\in\mathbb{R}$. Dus f is stijgend op $\mathbb{R}$.

b) Er geldt $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}<0$, $f(\frac{3}{4})=(\frac{3}{4})^3+\frac{3}{4}-1=\frac{27}{64}-\frac{1}{4}>0$
Omdat f continu is heeft het een nulpunt x^* tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$.
Omdat f stijgend is geldt dat $f(x)<f(x^*)=0$ voor $x<x^*$ en $f(x)>f(x^*)=0$ voor $x>x^*$. Dus f heeft buiten x^* geen ander nulpunt.

c) $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Invullen van $x_0=\frac{1}{2}$ geeft

$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}-1}{3\cdot(\frac{1}{2})^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{-3/8}{7/4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{3}{14}=\frac{10}{14}=\boxed{\frac{5}{7}}$$

5) a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$	$P_n(x)$
0	$2x^3-3x+1$	0	0	0
1	$6x^2-3$	3	3	$3(x-1)$
2	$12x$	12	$\frac{12}{2!}=6$	$3(x-1)+6(x-1)^2$
3	12	12	$\frac{12}{3!}=2$	$3(x-1)+6(x-1)^2+2(x-1)^3$
4	0	0	0	$3(x-1)+6(x-1)^2+2(x-1)^3$
5	0	0	0	
6	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Voor $n \geq 3$ is het n^e Taylorpolynoom rond $x=1$ gelijk aan $3(x-1)+6(x-1)^2+2(x-1)^3$.

b)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$	$P_n(x)$
0	$e^x(1-x)$	1	1	1
1	$e^x(1-x)-e^x = -x\cdot e^x$	0	0	1
2	$e^x\cdot(-x)+e^x\cdot -1 = e^x\cdot(-x-1)$	-1	$-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}x^2$

$P_2(x) = 1-\frac{1}{2}x^2$.