

EERSTE DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE VOOR INFORMATICI

27 oktober 2011, 11-13 uur

-
- Op de achterzijde staan twee opgaven en een lijstje formules.
 - Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.
 - Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
 - Vul op elk tentamenpapier **DUIDELIJK LEESBAAR** je naam en collegekaartnummer in.
 - Het cijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 5 plus 1.
-

OPGAVE 1. Bereken de volgende limieten:

a) (5 pt) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos 2\pi x}{(x - 1)^2};$

b) (5 pt) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{e^x + 2} - e^{x/2});$

c) (5 pt) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x^4 + 1}}{5x^2}.$

OPGAVE 2. Bepaal de afgeleides van de volgende functies:

a) (5 pt) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

b) (5 pt) $\frac{e^{\sin x} + 1}{x^2 + \sqrt{x}}.$

OPGAVE 3. (5 pt) Voor $c \in \mathbb{R}$ is de functie f_c is gegeven door:

$$f_c(x) = \begin{cases} c \ln x + c^2 & x \geq e, \\ c + \cos(2\pi x/e) & x < e. \end{cases}$$

Voor welke waarden van c is f_c continu in $x = e$?

ZIE DE ACHTERZIJDE!

OPGAVE 4. Beschouw de functie $f(x) = x^3 + x - 1$.

- a) (2pt) Laat zien dat f stijgend is op \mathbb{R} .
- b) (3pt) Beargumenteer dat f een nulpunt x^* heeft in het interval $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Heeft f nog andere nulpunten?
- c) (2pt) Vervolgens willen we een benadering van x^* vinden met behulp van de methode van Newton-Raphson. Kies startwaarde $x_0 = \frac{1}{2}$ en pas een iteratiestap van de methode van Newton-Raphson toe. Bereken het resulterende getal x_1 .

OPGAVE 5.

- a) (4pt) Bepaal alle Taylorpolynomen rond $x = 1$ van $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
- b) (4pt) Bepaal het 2^e orde Taylorpolynoom P_2 van de functie $f(x) = e^x(1 - x)$ rond het punt $x = 0$.

FORMULEBLAD

Goniometrie

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Standaardlimieten voor functies

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad \text{als } a > 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0 \quad \text{als } q > 0.$$