(1)

UITWERKING 2^E DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE
9 JANUARI 2012

(1) Zij $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2}$

a) $f(-\frac{5}{4}) = \dfrac{2(-5/4)^3 + (-5/4)^2 + 2}{(-5/4)^2} = \dfrac{-\frac{125}{32} + \frac{25}{16} + 2}{25/16} = \dfrac{\frac{-11}{32}}{25/16} < 0$

$f(-1) = \dfrac{2(-1)^3 + (-1)^2 + 2}{(-1)^2} = 1 > 0$

Dus f heeft een nulpunt in $[-\frac{5}{4}, -1]$

b) Het domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Verticale asymptoten: Alleen eventueel in $x=0$
$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$, (teller >0), $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ (teller >0)
Dus f heeft een verticale asymptoot ~~in~~ $\boxed{x=0}$

Scheve asymptoten: $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = 2x+1 + \dfrac{2}{x^2}$

(Eventueel met staartdeling $x^2 / 2x^3 + x^2 + 2 \backslash 2x+1$)

$$\begin{array}{l} 2x^3 \\ \hline x^2+2 \\ x^2+? \\ \hline 2 \end{array}$$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x - 1) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$, evenzo $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 2x - 1) = 0$

Dus $\boxed{y = 2x+1}$ is een scheve asymptoot voor f zowel voor $x \to +\infty$ als voor $x \to -\infty$

Merk op: $f(x) = 2x+1 + \dfrac{2}{x^2} > 2x+1$. Dus de grafiek van f ligt boven de lijn $y = 2x+1$

Extremen $f'(x) = \dfrac{x^2(6x^2+2x) - 2x(2x^3+x^2+2)}{x^4}$

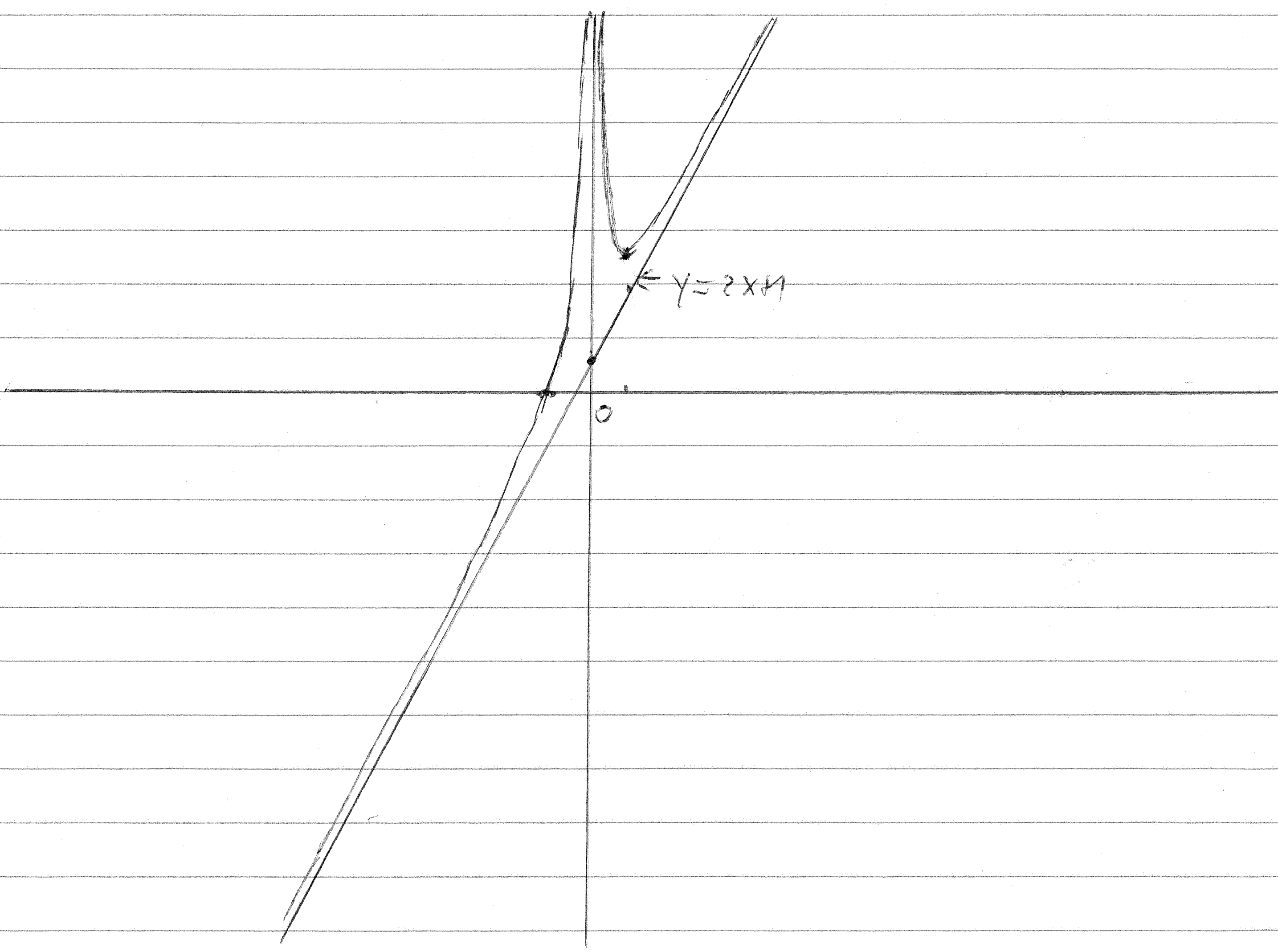
$$= \frac{2x^4 - 4x}{x^4} = \frac{2(x^3-2)}{x^3}$$

Het enige nulpunt van f' is $x = \sqrt[3]{2}$

Tekenverloop		0		$\sqrt[3]{2}$	
f'	+	NA	−	0	+
f	↗		↘		↗

$x<0$: $x^3-1<0$, $x^3<0$
$0<x<1$: $x^3>0$, $x^3-1<0$
$x>1$: $x^3-1>0$, $x^3>0$

f heeft een minimum in $x=\sqrt[3]{2}$ grootte $f(\sqrt[3]{2}) = 1 + 4\sqrt[3]{2}$
Dit is een lokaal minimum want $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



2 a) Substitueer $u = \sqrt{x^2+1}$

$du = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\,dx = x(x^2+1)^{-1/2}\,dx$

$$\int_0^{\sqrt{(\pi/2)^2-1}} \frac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^{\pi/2} \sin u\,du = \left[-\cos u\right]_1^{\pi/2} = \boxed{\cos 1}$$

Als x loopt van 0 naar $\sqrt{(\pi/2)^2-1}$ dan loopt u van 0 naar $\sqrt{\left(\sqrt{(\pi/2)^2-1}\right)^2+1} = \sqrt{(\pi/2)^2-1+1} = \pi/2$.

b) Met partiële integratie

$$\int x^2 e^{+2x}\,dx \underset{\text{pi}}{=} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx$$

$f(x) = x^2$

$g'(x) = e^{+2x}$

$g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right] + \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

3 a) $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\infty} 3y^3 = \infty$, $\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} 3y^3 = -\infty$

f heeft geen absoluut maximum, want f neemt willekeurig grote waarden aan; f heeft geen absoluut minimum want f neemt willekeurig kleine waarden aan.

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y = y(2x+2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x + 9y^2$

Stationaire punten: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ of $x = -1$. $y = 0$ invullen in $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ geeft $x^2 + 2x = 0$

dus $x = 0$ of $x = -2$

Dit geeft ~~de~~ twee stationaire punten $\boxed{(0,0) \text{ en } (-2,0)}$

$x=-1$ invullen in $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ geeft $9y^2-1=0$ dus $y=\pm\frac{1}{3}$

Dit geeft twee stationaire punten $\boxed{(-1,\frac{1}{3}), (-1,-\frac{1}{3})}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x+2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18y$

stationair punt	$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$	$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$H = AC - B^2$	conclusie
$(0,0)$	0	2	0	$-4<0$	zadelpunt
$(-2,0)$	0	-2	0	$-4<0$	zadelpunt
$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{2}{3}>0$	0	6	$4>0$	minimum
$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{2}{3}<0$	0	-6	$4>0$	maximum

$f(-1,-\frac{1}{3}) = (-1)^2(-\frac{1}{3}) + 2(-1)(-\frac{1}{3}) + 3(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{27} = \frac{2}{9}$

$f(-1,\frac{1}{3}) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 2(-1)(\frac{1}{3}) + 3(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{27} = -\frac{2}{9}$

Het minimum is groter dan het maximum. Dus zowel het minimum als het maximum zijn lokaal (volgt ook uit a))

c) $\nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right) = (2,9)$

eenheidsvector in de richting $(3,-4)$, $\|(3,-4)\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16}$
$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Dus de eenheidsvector in de richting $(3,-4)$ is
$(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

De richtingsafgeleide wordt dan $(2,9)\cdot(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}) = \frac{2\cdot 3 - 9\cdot 4}{5} = \frac{-30}{5}$
$= \boxed{-6}$

4 a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} 3^n \cdot x^n$

Convergentiestraal $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ waarbij $a_n = \frac{n+1}{n} \times 3^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n} \times 3^n}{\frac{n+2}{n+1} \times 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{1}{3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) $x = \frac{1}{3}$ invullen geeft $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$. Deze reeks divergeert

omdat $\frac{n+1}{n} \geq 1$, en $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

5 a) $\int x^{-2} \ln x \, dx = -x^{-1} \ln x + \int x^{-1} \ln' x \, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx$

$f(x) = \ln x$
$g'(x) = x^{-2}$
$g(x) = -x^{-1}$

$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

b) Volgens het integraalkenmerk is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ convergent

dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ convergent is

$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^A = \lim_{A\to\infty} \left[-\underbrace{\frac{\ln A}{A}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{A}}_{\downarrow 0} + 1\right] = \boxed{1}$

Dus de integraal convergeert

c) $|S - S^0| = \sum_{n=10^6+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{10^6}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-\ln A}{A} - \frac{1}{A}\right]_{10^6}^{A}$

$= \frac{\ln 10^6}{10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{1+6\ln 10}{10^6}$