UITWERKING EXTRA HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1
29-1-2021

1 a) We moeten de nulpunten bepalen van $x^3-9x^2+15x-7$.
Eventuele geheeltallige nulpunten zijn positieve of negatieve delers van -7, dus $\pm1, \pm7$. Het blijkt dat $x=1$ een nulpunt is.

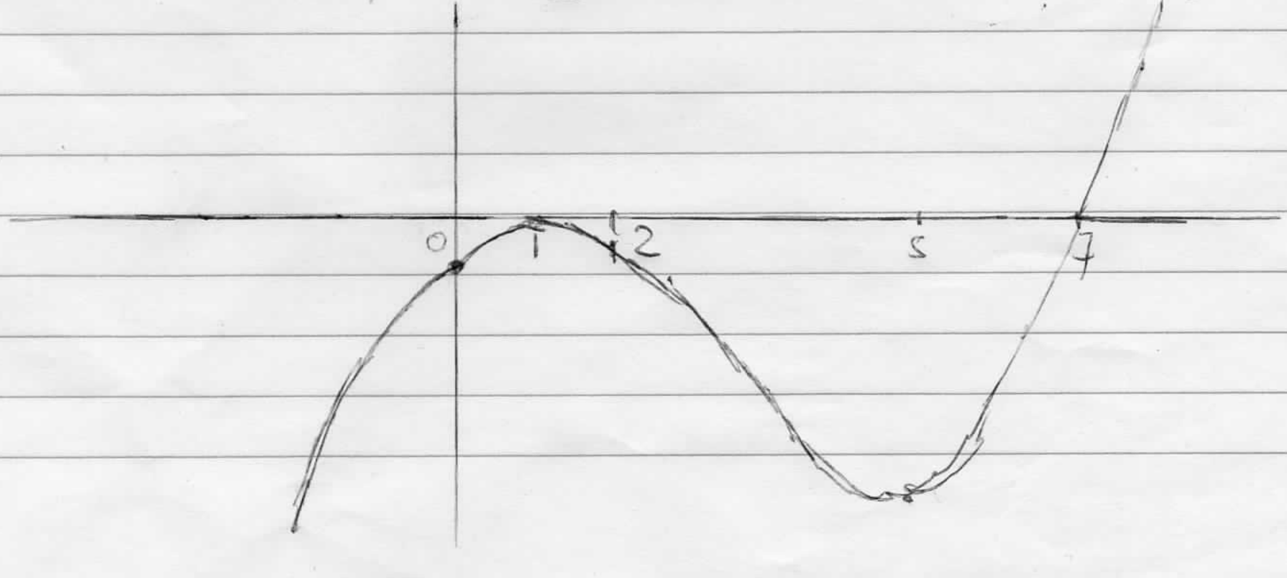
$$
\begin{array}{l}
x-1 \,/\, x^3-9x^2+15x-7 \,\backslash\, x^2-8x+7 \\
\quad\;\; \underline{x^3-x^2} \;\; - \\
\quad\;\; -8x^2+15x-7 \\
\quad\;\; \underline{-8x^2+8x} \;\; - \\
\qquad\quad 7x-7 \\
\qquad\quad \underline{7x-7} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dus $x^3-9x^2+15x-7=(x-1)(x^2-8x+7)=(x-1)(x-1)(x-7)=(x-1)^2(x-7)$.
De nulpunten van f zijn $x=1$, $x=7$

b) $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x^2-6x+5)=3(x-1)(x-5)$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
f' & + & 0 & - & 0 & + \\
\hline
f & \nearrow & 1 & \searrow & 5 & \nearrow
\end{array}
$$

f stijgt voor $x<1$, daalt voor $1<x<5$ en stijgt voor $x>5$
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Dus f neemt in $x=1$ een relatief maximum aan, van grootte $f(1)=0$, en in $x=5$ een relatief minimum, van grootte $f(5)=\frac{1}{8}(125-9\times25+15\times5-7)=-4$



c) $f(0) = -\frac{7}{8}$, $f(2) = \frac{1}{8}(8 - 36 + 30 - 7) = -\frac{5}{8}$

grootte $-\frac{7}{8}$

f neemt op $[0,2]$ zijn absolute minimum aan in $x=0$, zijn absolute maximum in $x=1$, grootte 0, en een relatief minimum in $x=2$, grootte $-\frac{5}{8}$

(2) Er geldt: $y^2 = x^{-3}$, $y^4 = x^{-6}$, dus we moeten het absolute minimum bepalen van $f(x) = 6x^5 + 5x^{-6}$ op $(0,\infty)$.

Er geldt $f'(x) = 30x^4 - 30x^{-7} = \dfrac{30x^{11} - 30}{x^7}$

Tekenoverzicht f':

$$\begin{array}{c|ccccc} f' & 0 & - & 0 & + & \\ & 0 & & 1 & & \\ f & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$$

Dus f neemt zijn absolute minimum aan in $\boxed{x=1}$

De bijbehorende y-waarde is $\boxed{y=1}$. Dus $6x^5 + 5y^4$ is minimaal voor $\boxed{x=1, y=1}$

(3) a) $\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} f_c(x) = \lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} c \sin \pi x = c \sin \frac{1}{2}\pi = c$

f_c is links-continu in $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = c^2 - 2 \Leftrightarrow c^2 - c - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (c+1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c=-1 \text{ of } c=2}$

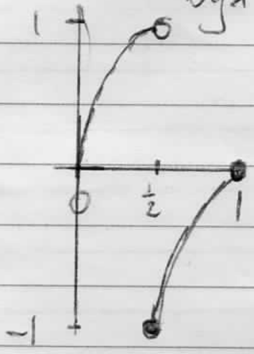
f_c ~~is rechts-continu in x~~ $\lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} f_c(x) = \lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} c^2 \cdot {}^{2}\log x = c^2 \cdot {}^{2}\log \frac{1}{2} = -c^2$

f_c is rechts-continu in $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - c^2 = c^2 \Leftrightarrow 2c^2 = 2 \Leftrightarrow c^2 = 1$
$\Leftrightarrow \boxed{c=-1 \text{ of } c=1}$

f_c is continu in $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f_c$ is links-continu en rechts-continu in $x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{c=-1}$

③

b) Er geldt $f_1(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{voor } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-2=-1 & \text{voor } x = \frac{1}{2} \\ {}^2\log x & \text{voor } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$



④ a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\cos x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{-\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \cos x}{-\cos x}$

$= \frac{e^0 + \cos 0}{-\cos 0} = \frac{1+1}{-1} = \boxed{-2}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{10^x + 9^x + x}{10^x + x^{1000000}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{9^x}{10^x} + \frac{x}{10^x}}{1 + \frac{x^{1000000}}{10^x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \overset{\to 0}{(9/10)^x} + \overset{\to 0}{x/10^x}}{1 + \underbrace{x^{1000000}/10^x}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

⑤ $f(x) = \frac{x+1}{x^2(x+2)}$

a) Het domein van f bestaat uit alle x waar de noemer $\neq 0$ is dus $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

Tekenoverzicht f

$+$	NG	$-$	0	$+$	NG	$+$
	-2		-1		0	
$x+1<0$, $x+2<0$		$x+1<0$, $x+2>0$		$x+1>0$, $x+2>0$		$x+1>0$, $x+2>0$

verticale asymptoten: $x=-2$, $x=0$

$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$

b) graad teller < graad noemer, dus f heeft een horizontale asymptoot $y=0$ voor $x \to \infty$, $x \to -\infty$

Er geldt: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^3+2x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{-2}+x^{-3}}{1+2x^{-1}} = 0$

c) $$f'(x) = \frac{x^2(x+2) - (x+1)(x^2+2x(x+2))}{x^4(x+2)^2} = \frac{x(x+2)-(x+1)(x+2(x+2))}{x^3(x+2)^2}$$

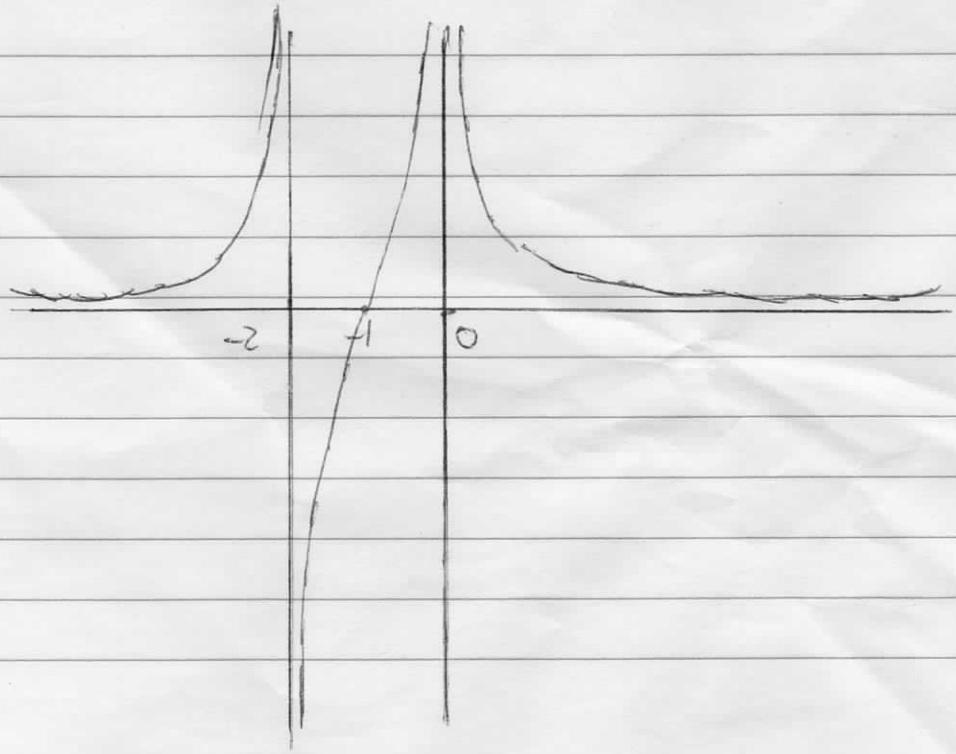
$$= \frac{x^2+2x - (x+1)(3x+4)}{x^3(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-3x^2-4x-3x-4}{x^3(x+2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-5x-4}{x^3(x+2)^2} = -\frac{2x^2+5x+4}{x^3(x+2)^2}$$

d) $2x^2+5x+4$ heeft discriminant $5^2-4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$. Dus de teller heeft geen nulpunten, en f heeft geen extremen.
Er geldt: $2x^2+5x+4 > 0$ voor alle x, $(x+2)^2 > 0$ voor $x \neq 0$
Dus voor het teken van f' hoeven we alleen naar het teken van x^3 te kijken.

f'	+	NG	+	NG	−
		-2		0	
f	↗		↗		↘

e)



6 a) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$

$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3} + \frac{4}{9}x^{-7/3}$

$f'''(x) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-8/3} + \frac{4}{9}\left(-\frac{7}{3}\right)x^{-10/3} = \frac{10}{27}x^{-8/3} - \frac{28}{27}x^{-10/3}$

b)

n	$f^{(n)}(8)$	$f^{(n)}(8)/n!$
0	$2+2^{-1} = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
1	$\frac{1}{3}\times 2^{-2} - \frac{1}{3}\times 2^{-4}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$
2	$-\frac{2}{9}\times 2^{-5} + \frac{4}{9}\times 2^{-7}$	$-\frac{2}{9\times 32} + \frac{4}{9\times 128} = -\frac{1}{9\times 16} + \frac{1}{9\times 32} = -\frac{1}{9\times 32} = \frac{-1}{288}$

$8^{1/3} = 2.$ $\boxed{P_{2,8}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{16}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2}$

c) $R_{3,8}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-8)^3 = \frac{\frac{10}{27}s^{-8/3} - \frac{28}{27}s^{-10/3}}{6}(x-8)^3$

$= \left(\frac{5}{81}s^{-8/3} - \frac{14}{81}s^{-10/3}\right)(x-8)^3,$

waarbij s tussen 8 en x ligt.