EXTRA TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1,
16-11-2020

1 a) Laat $f(x) = x^3+4x-16$. Een eventueel geheeltallig nulpunt van f is een positieve of negatieve deler van -16, dus 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8 of 16, -16. Er geldt $f(1) = 1+5-16 = -10$, $f(-1) = -1-4-16 = -21$, $f(2) = 8+8-16 = 0$. Dus $x=2$ is een nulpunt van f. We bepalen de eventuele andere nulpunten met een staartdeling.

$$
\begin{array}{rl}
x-2 \,/\, x^3+4x-16 \,\backslash\, x^2+2x+8 & \\
\underline{x^3-2x^2} - & \\
2x^2+4x-16 & x^3+4x-16 = (x-2)(x^2+2x+8) \\
\underline{2x^2-4x} - & \\
8x-16 & \\
\underline{8x-16} & \\
0 &
\end{array}
$$

De discriminant van x^2+2x+8 is $2^2-4\cdot 8 = -28 < 0$. Dus x^2+2x+8 heeft geen (reële) nulpunten $\boxed{x=2}$ is het enige nulpunt van f

b) De functie $f(x) = x^3+4x-15$ is continu. Er geldt $f(1) = 1+5-15 = -9 < 0$ $f(2) = 8+8-15 = 1 > 0$. Volgens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in (1,2).
Er geldt $f'(x) = 3x^2+4 > 0$ dus $f(x)$ is stijgend op $\mathbb{R}$ Daarom heeft f maar één nulpunt.

c)
$$
\begin{array}{rl}
x^2+x \,/\, x^3+4x-15 \,\backslash\, x-1 & x^3+4x-15 = (x-1)(x^2+x) + 5x-15 \\
\underline{x^3+x^2} & g(x) = x-1+\dfrac{5x-15}{x^2+4x-15} \\
-x^2+4x-15 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
5x-15 & \lim\limits_{x\to\pm\infty} (g(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x-15}{x^2+4x-15} \\
 & = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5/x-15/x^2}{1+4/x-15/x^2} = 0
\end{array}
$$

Dus $\boxed{y=x-1}$ is de scheve asymptoot van $g(x)$ voor $x\to\pm\infty$

2. Er geldt $6xy = 12-4x^2$, $y = (12-4x^2)/6x$. Dus de inhoud van het blok is $2x^2(12-4x^2)/6x = (24x^2-8x^4)/6x = 4x - \frac{4}{3}x^3 =: f(x)$

Er geldt $f'(x) = 4-4x^2$

Tekenoverzicht f':

$$\begin{array}{c|ccc} & & + & 0 & - \\ \hline & 0 & & 1 & \\ f & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Dus f neemt op $(0,\infty)$ zijn absolute maximum aan in $\boxed{x=1}$, en $f(1) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

De bijbehorende waarde van y is $\boxed{y = \frac{12-4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}}$

3. a) $\lim_{x\downarrow 2} f_c(x) = 3c(2-3) = -3c$, $\lim_{x\uparrow 2} f_c(x) = c^2-4$.

Dus $\lim_{x\to 2} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow -3c = c^2-4 \Leftrightarrow c^2+3c-4=0$
$\Leftrightarrow (c-1)(c+4)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=1 \text{ of } c=-4}$

$f_c(x)$ is continu in $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f_c(x)$ bestaat en is gelijk aan $f_c(2)$

$c=1$: $\lim_{x\to 2} f_c(x) = -3$, $f_c(2) = 3c(2-3) = -3$, dus f_c is continu in $x=2$

$c=-4$: $\lim_{x\to 2} f_c(x) = 12$, $f_c(2) = 3c(2-3) = 12$, dus f_c is continu in $x=2$

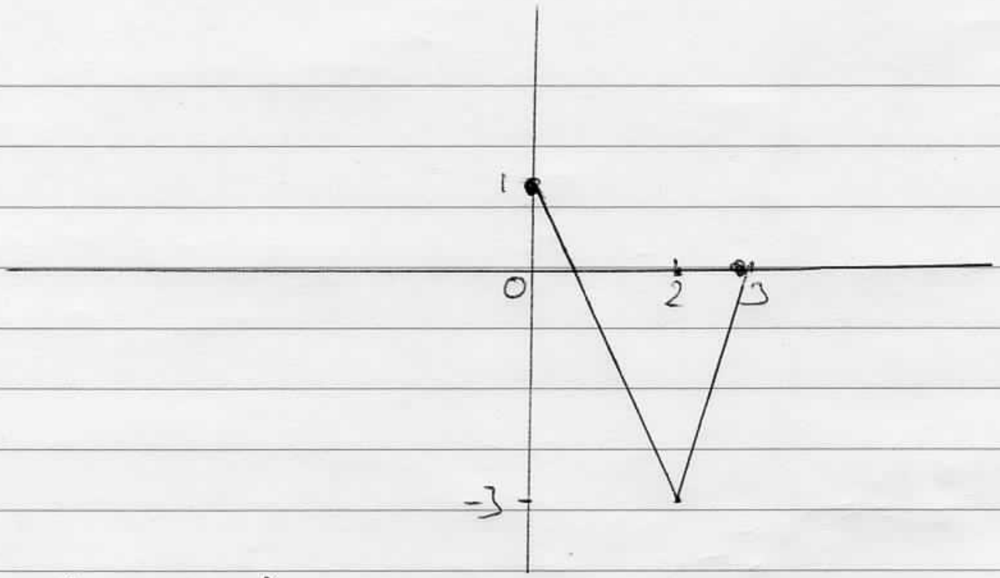
Dus f_c is continu in $x=2 \Leftrightarrow \boxed{c=1 \text{ of } c=-4}$

b) Er geldt: $f_1(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{voor } 0 \le x < 2 \\ 3(x-3) = 3x-9 & \text{voor } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

De grafiek van f_1 bestaat uit twee lijnstukken

③

c)



$f(0)=1,\ f(2)=-3),\ f(3)=0$

d) Volgens de grafiek heeft f_1 in $x=0$ een absolunt maximum op $[0,3]$ van grootte 1, een absolunt minimum in $x=2$ van grootte -3, en een relatief maximum in $x=3$ van grootte 0.

④ a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}+\ln x+\frac{2}{\pi}\sin \pi x-1}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}+\frac{1}{x}+2\cos \pi x}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-\frac{1}{x^2}-2\pi\cos \pi x}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \boxed{0}$

b) Gebruik de worteltruc:

$\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{1+x^8}-x^4) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{1+x^8}-x^4)(\sqrt{1+x^8}+x^4)}{\sqrt{1+x^8}+x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^8-x^8}{\sqrt{1+x^8}+x^4}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^8}+x^4} = \boxed{0}$

⑤ a) $f(x)=\dfrac{2x^4+1}{x^4-1}$

<u>domein</u>: noemer moet $\neq 0$ zijn: $x^4-1=0 \Leftrightarrow x=1, of -1$: $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$

<u>verticale asymptoten</u>: teller $\neq 0$, noemer $=0$: $x=1$, $x=-1$.

Tekenoverzicht f

$$\begin{array}{ccccc} + & NG & - & NG & + \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

$x^4-1>0 \quad x^4-1<0 \quad x^4-1>0$

$2x^4+1>0$ voor alle x

$\lim_{x\downarrow 1} f(x)=\infty$, $\lim_{x\uparrow 1} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\downarrow -1} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\uparrow -1} f(x)=\infty$

b) graad teller = graad noemer, dus f heeft een horizontale asymptoot voor $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^4+1}{x^4-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+1/x^4}{1-1/x^4}=2$$

$\boxed{y=2}$ is de horizontale asymptoot van f voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$

c) $$f'(x)=\frac{(x^4-1)\,8x^3-(2x^4+1)\,4x^3}{(x^4-1)^2}=\frac{8x^7-8x^3-8x^7-4x^3}{(x^4-1)^2}=\frac{-12x^3}{(x^4-1)^2}$$

Tekenoverzicht f'

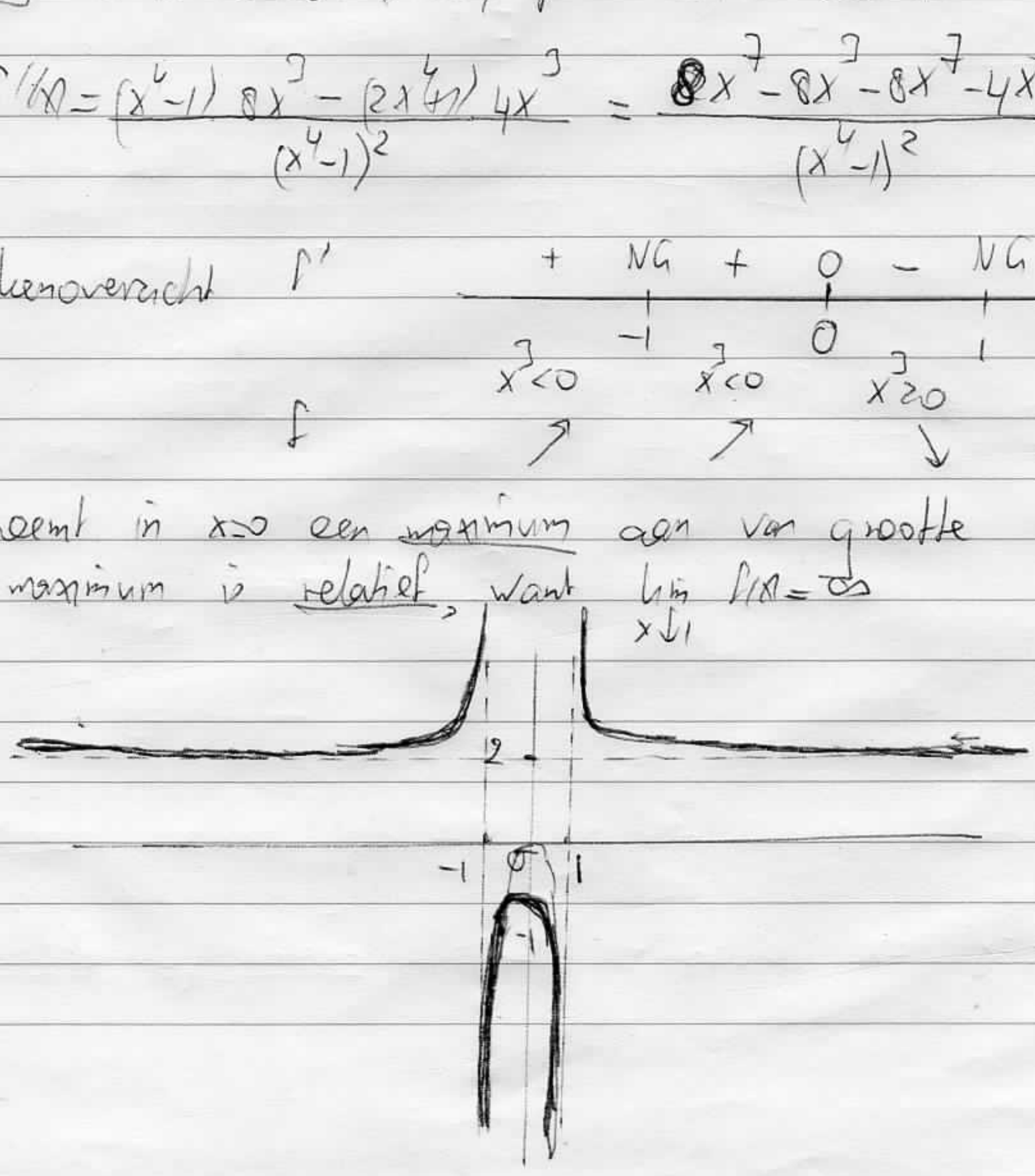
$$\begin{array}{ccccccc} + & NG & + & 0 & - & NG & - \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

$x^3<0 \quad x^3<0 \quad x^3>0 \quad x^3>0$

$f \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \searrow$

f neemt in $x=0$ een maximum aan van grootte $f(0)=\frac{1}{-1}=-1$

Dit maximum is relatief, want $\lim_{x\downarrow 1} f(x)=\infty$



6 a) $f(x) = (1+x)^{1/2} - (1+2x)^{1/2}$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$(1+x)^{1/2} - (1+2x)^{1/2}$	0	0
1	$\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 2\right)(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$ $= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} + (1+2x)^{-3/2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$
3	$-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} - \frac{3}{2}\cdot 2(1+2x)^{5/2}$ $= \frac{3}{8}(1+x)^{5/2} - 3(1+2x)^{-5/2}$		

b) $P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$

c) $R_{2,0}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}x^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}(1+s)^{5/2} - 3(1+2s)^{5/2}\right)x^3 = \left(\frac{1}{16}(1+s)^{5/2} - \frac{1}{2}(1+2s)^{5/2}\right)x^3$

met s tussen 0 en x.