UITWERKING HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1 11/1/2017

(1) a) $f'(x) = 4x^3 - 4$

tekenoverzicht f'

		1	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

f daalt op $(-\infty, 1)$ en stijgt op $(1, \infty)$

b) f is continu.
$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 9 > 0$
Wegens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in $(0,1)$ en een nulpunt in $(1,2)$

c) Omdat $f(x)$ daalt op $(-\infty, 1)$ kan f niet meer dan één nulpunt in $(-\infty, 1)$ hebben. Omdat $f(x)$ stijgt op $(1, \infty)$ kan f niet meer dan een nulpunt in $(1, \infty)$ hebben. Verder is $f(1) = -2 \neq 0$. Dus f heeft hoogstens twee nulpunten. Uit b) volgt dat f precies $\boxed{\text{twee}}$ nulpunten heeft.

(2) Uit $2x^2 + 4xy = 6$ volgt $4xy = 6 - 2x^2$, dus $y = \frac{6-2x^2}{4x} = \frac{3-x^2}{2x}$

De inhoud van de doos is $f(x) = x^2 \cdot \frac{3-x^2}{2x} = x \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)$
$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$

Er geldt: $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2$. Verder is $x > 0$

Tekenoverzicht f'

	0		1	
f'		$+$		$-$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

Dus $f(x)$ is maximaal voor $x = 1$. Dan geldt ook: $y = 1$.
Dus de inhoud van de doos is maximaal als
$\boxed{x = y = 1}$

3 a) $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} \overset{=}{\tfrac{0}{0}} \lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} {}^{x^3}\log x^2 = \dfrac{2}{3}$

omdat $x^2 = (x^3)^{2/3}$

Dus $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat en is gelijk aan $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) - x}{x^2} \overset{=}{\tfrac{0}{0}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1+2x}{1+x+x^2} - 1}{2x} \overset{=}{\tfrac{0}{0}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x+x^2).2 - (1+2x)(1+2x)}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

4

$$\begin{array}{l} x^{10}-1 \;/\; 2x^{11}+2x^{10}+8 \;\backslash\; 2x+2 \\ \quad\; \underline{2x^{11} - 2x} \quad - \\ \quad\; 2x^{10}+2x+8 \\ \quad\; \underline{2x^{10} - 2} \quad - \\ \quad\;\; 2x+10 \end{array}$$

$2x^{11}+2x^{10}+8 = (2x+2)(x^{10}-1) + 2x+10$

Dus $f(x) = 2x+2 + \dfrac{2x+10}{2x^{11}+2x^{10}+8}$

Bijgevolg is $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (2x+2) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+10}{2x^{11}+2x^{10}+8}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x^{10}} + \frac{10}{x^{11}}}{2 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^{11}}} = 0$

We zien dat $\boxed{y = 2x+2}$ een schene asymptoot is van $f(x)$, zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

5 a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(27)$	$f^{(n)}(27)/n!$
0	$x^{10/3}$	$27^{10/3} = (3^3)^{10/3} = 3^{10}$	3^{10}
1	$\frac{10}{3} x^{7/3}$	$\frac{10}{3} \times 27^{7/3} = \frac{10}{3} \times 3^7 = 10 \times 3^6$	10×3^6
2	$\frac{70}{9} x^{4/3}$	$\frac{70}{9} \times 27^{4/3} = \frac{70}{9} \times 3^4 = 70 \times 9$	$\frac{70 \times 9}{2} = 315$
3	$\frac{280}{27} x^{1/3}$		

$P_{2,27}(x) = 3^{10} + 10 \times 3^6 (x-27) + 315(x-27)^2$

$R_{3,27}(x) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{280}{27} \theta^{1/3} (x-27)^3$, θ tussen 27 en x.

b) $|R_{3,27}(26{,}99)| = \left| \frac{1}{6} \cdot \frac{280}{27} \theta^{1/3} (-0{,}01)^3 \right|$ θ tussen 26,99 en 27

$< \frac{1}{6} \times \frac{280}{27} \times 3 \times 10^{-6} = \frac{280}{54} \times 10^{-6} < 10^{-5}$

omdat $\theta^{1/3} < 27^{1/3} = 3$.

(~~sorry~~ ik had hier een rekenfout gemaakt)

6 a) $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Dus het domein van $f(x)$ is $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ en de verticale asymptoten van $f(x)$ zijn $x = -2$, $x = 3$

Tekenoverzicht f

$$\begin{array}{ccccccccc} + & NG & - & 0 & - & NG & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 3 & \end{array}$$

Dus $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = 1$

Dus $\boxed{y=1}$ is de horizontale asymptoot van $f(x)$ zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

(4)

c) $f'(x) = \dfrac{(x^2-x-6)\cdot 2x - x^2(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \dfrac{2x^3-2x^2-12x-2x^3+x^2}{(x^2-x-6)^2}$

$= \dfrac{-x^2-12x}{(x^2-x-6)^2} = \dfrac{-x(x+12)}{(x^2-x-6)^2}$

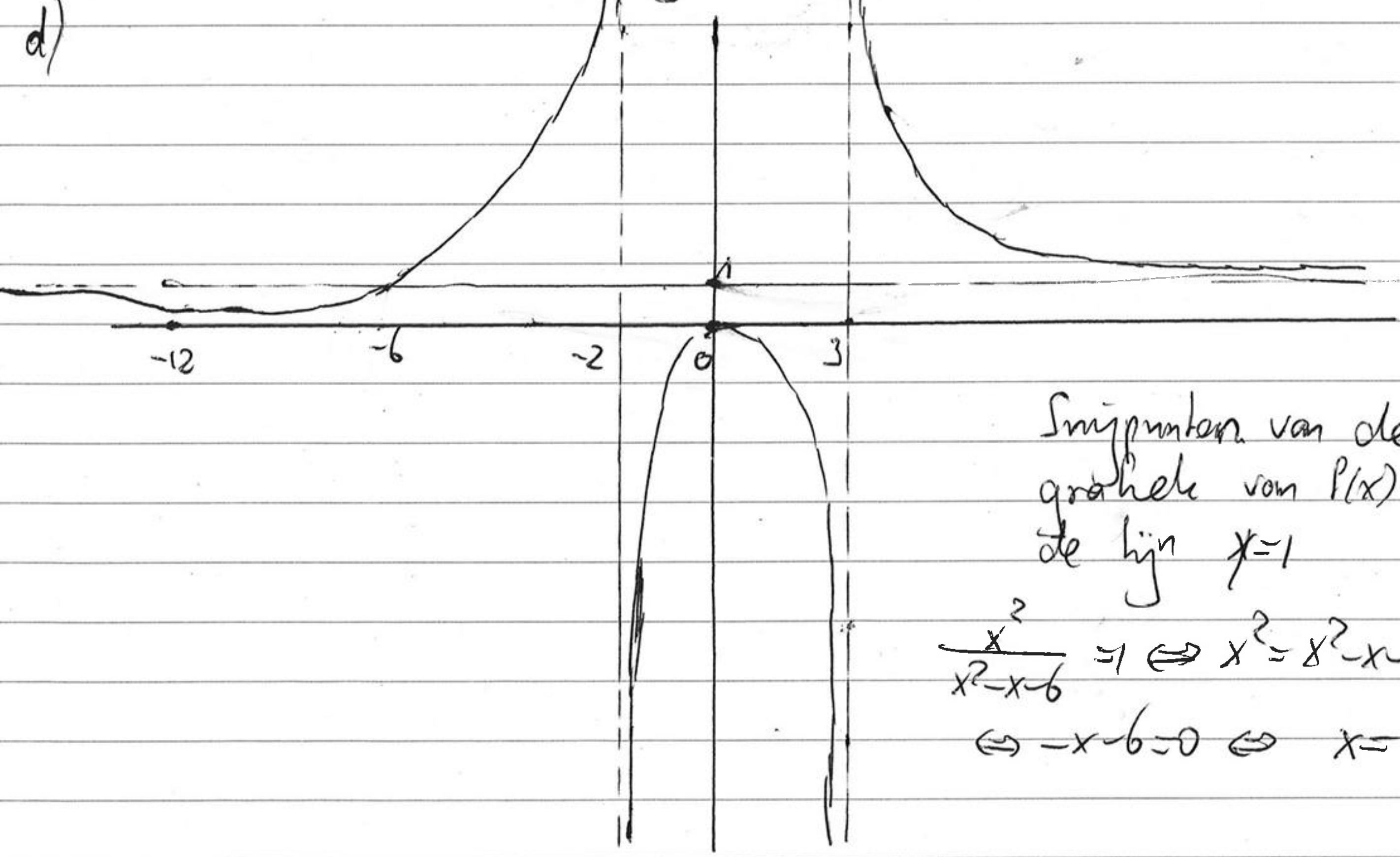
Tekenoverzicht f': $-$ | -12 | $+$ | -2 NG | $+$ | 0 | $-$ | 3 NG | $-$

f: ↓ ↗ ↗ ↓ ↓

extremen	plaats	grootte	aard
	$x=-12$	$f(-12) = \frac{144}{180} = \frac{4}{5}$	minimum (relatief)
	$x=0$	$f(0)=0$	maximum (relatief)

Het minimum en maximum zijn relatief omdat $f(-12) > f(0)$.

d)



Snijpunten van de grafiek van $f(x)$ met de lijn $y=1$

$\dfrac{x^2}{x^2-x-6} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x^2-x-6$

$\Leftrightarrow -x-6=0 \Leftrightarrow x=-6$