HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1

woensdag 11 januari 2017, 14:00-16:00

- Vul op elk tentamenpapier **DUIDELIJK LEESBAAR** je naam en collegekaartnummer in.
- Op de achterzijde staan drie opgaven en een lijstje met formules.
- Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Een eenvoudige wetenschappelijke calculator mag wel.
- Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
- Links in de marge staat het maximale aantal punten voor een opgave. Het cijfer is (aantal behaalde punten)/5.

---

3 **1.** *a)* Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 4x + 1$. Bepaal voor welke waarden van x de functie $f(x)$ stijgt en voor welke waarden van x deze functie daalt.

3 *b)* Laat zien dat $f(x)$ in elk van de open intervallen $(0, 1)$, $(1, 2)$ een nulpunt heeft.

4 *c)* Hoeveel nulpunten heeft $f(x)$ in $\mathbb{R}$? Motiveer je antwoord.

5 **2.** Een rechthoekige doos heeft zijden x, x en y. De oppervlakte van deze doos is $2x^2 + 4xy = 6$. Druk y uit in x en bepaal x en y zodat de inhoud x^2y van deze doos maximaal is.

3. Ga voor de volgende limieten na of ze bestaan en zo ja, bereken ze:

5 *a)* $\lim_{x\to 0} f(x)$, waarbij

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \text{ als } x < 0, \qquad f(x) = {}^{x^3}\log(x^2) \text{ als } x > 0.$$

5 *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) - x}{x^2}$.

5 **4.** Bepaal de scheve asymptoten voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ van

$$f(x) = \frac{2x^{11} + 2x^{10} + 8}{x^{10} - 1}.$$

5. Wanneer een functie f $n+1$ keer differentieerbaar is in de buurt van $x = a$, dan geldt $f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$ in de buurt van $x = a$, waarbij $p_{n,a}(x)$ het n^{e} Taylorpolynoom rond $x = a$ is, en $R_{n+1,a}(x)$ de Lagrange-restterm. Hier is

$$R_{n+1,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{met } \theta \text{ tussen } a \text{ en } x.$$

6 *a)* Gegeven is $f(x) = x^{10/3}$. Bepaal $p_{2,27}(x)$ en $R_{3,27}(x)$.

4 *b)* We benaderen $26{,}99^{10/3}$ door $p_{2,27}(26{,}99)$. We maken een fout $R_{3,27}(26{,}99)$. Laat zien dat $|R_{3,27}(26{,}99)| < 10^{-6}$. Je mag niet gebruikmaken van je rekenapparaat.

6. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 6}$.

3 *a)* Bepaal het domein van $f(x)$. Bepaal de verticale asymptoten van $f(x)$. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

2 *b)* Bepaal de horizontale asymptoten van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

3 *c)* Bepaal voor welke waarden van x de functie $f(x)$ stijgend of dalend is. Bepaal ook de extremen van $f(x)$ met plaats (x-coördinaat), aard (maximum of minimum, absoluut of relatief) en grootte (y-coördinaat).

2 *d)* Schets de grafiek van $f(x)$.

Formules goniometrie

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y;$
$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};\quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3};\quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Standaardlimieten voor functies

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;\quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a;\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0;\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^q} = 0 \text{ als } q > 0.$$