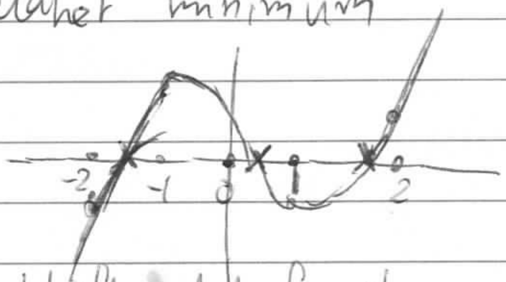
HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1 10/1/2018

1 a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ We gebruiken de tussenwaardestelling: als f een continue functie is met $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, of $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, dan is er een $c \in (a, b)$ met $f(c) = 0$.
Voor genoemde f is $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3 > 0$. Dus f heeft nulpunten in $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$ Tekenoverzicht f'

	-1		1	
+		−		+
↗		↘		↗

$f(-1) = 3 > 0$ relatief maximum
$f(1) = -1 < 0$ relatief minimum



Uit de grafiek blijkt dat f niet meer dan drie nulpunten heeft.

c)

$$\begin{array}{l|l} x^2 + x \,/\, x^3 - 3x + 1 & x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \;- & \\ -x^2 - 3x + 1 & \\ \underline{-x^2 - x} \;- & \\ -2x + 1 & \end{array}$$

$x^3 - 3x + 1 = (x-1)(x^2 + x) + -2x + 1$,

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + x} = x - 1 + \frac{-2x + 1}{x^2 + x}$$

Dus $\lim_{x \to \pm\infty} (g(x) - (x-1)) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x+1}{x^2+x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 0.$

Bijgevolg is $\boxed{y = x - 1}$ een schuine asymptoot van g voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$

2 a) $c \neq 0$: $\lim_{x \uparrow 0} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^2+x+c} = \frac{1}{c}$

$\lim_{x \downarrow 0} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2+c}{x+c^2} = \frac{c}{c^2} = \frac{1}{c}$

$c=0$: $\lim_{x \uparrow 0} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^2+x} = -\infty$ ($\frac{1}{x^2+x} < 0$ voor $x<0$ en in de buurt van 0.)

$\lim_{x \downarrow 0} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \downarrow 0} x = 0$

b) Voor $c=0$ bestaat $\lim_{x \to 0} f_c(x)$ niet

Voor $c \neq 0$ is $\lim_{x \uparrow 0} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 0} f_c(x) = \frac{1}{c}$, dus $\boxed{\lim_{x \to 0} f_c(x) = \frac{1}{c} \text{ voor alle } c \neq 0}$

f_c is continu in $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f_c(x)$ bestaat en is gelijk aan $f_c(0)$

$\Leftrightarrow \boxed{c=1}$

3 Uit $2x^2+4xy=6$ volgt: $4xy = 6-2x^2$, $y = \frac{6-2x^2}{4x}$

De inhoud van de doos is $f(x) := x^2 y = x^2 \cdot \frac{6-2x^2}{4x} = \frac{x(6-2x^2)}{4}$

$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2$. Er geldt $x>0$

Tekenoverzicht f': $0 \quad + \nearrow \quad 1 \quad - \searrow$

Dus de inhoud is maximaal voor $\boxed{x=1}$

De bijbehorende waarde van y is $\boxed{y=1}$

4 a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot e^{x^2}}{\sin x} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{\cos x} = \boxed{2}$

b). $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+4^x}-2^x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+4^x}-2^x\right)\left(\sqrt{1+4^x}+2^x\right)}{\sqrt{1+4^x}+2^x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+4^x)-4^x}{\sqrt{1+4^x}+2^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+4^x}}_{\infty}+\underbrace{2^x}_{\infty}} = \boxed{0}$

5

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$(\ln x)^2$	0	0
1	$2\ln x\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$	0	0
2	$\frac{x\cdot\frac{2}{x}-2\ln x}{x^2} = \frac{2-2\ln x}{x^2}$	2	1
3	$\frac{x^2\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)-2x(2-2\ln x)}{x^4} = \frac{-6x+4x\ln x}{x^4} = \frac{-6+4\ln x}{x^3}$	-6	-1

$P_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3$

$= \boxed{(x-1)^2-(x-1)^3}$

6 a) Domein $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Verticale asymptoot $x=0$.

$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{(x+1)^2}{x^4} = \infty$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$

($f(x) > 0$ voor alle $x \neq 0, -1$)

b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4} = 0$

$y=0$ is de horizontale asymptoot van f voor $x\to\pm\infty$

c) $f'(x) = \frac{x^4 \cdot 2(x+1) - 4x^3 \cdot (x+1)^2}{x^8} = \frac{2x(x+1) - 4(x+1)^2}{x^5}$

$= \frac{(x+1)(2x-4(x+1))}{x^5} = \frac{(x+1)(2x-4x-4)}{x^5} = \frac{(x+1)(-2x-4)}{x^5}$

$= \frac{-2(x+1)(x+2)}{x^5}$

Tekenoverzicht f'

+	0	−	0	+	VG	−
↗	−2	↓	−1	↗	0	↓

$x=-2$ $f(-2) = \frac{1}{16}$ relatief maximum ($\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$)

$x=-1$ $f(-1) = 0$ absoluut minimum (want $f(x) \geq 0$ voor $x \neq 0, -1$)