UITWERKING HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1, 23/1/2019

1 a) Er geldt $f(-5) = \frac{-125}{3} + 20 + 6 = \frac{-47}{3} < 0$, $f(-4) = \frac{-64}{3} + 16 + 6 = \frac{2}{3} > 0$

Volgens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in $(-5,-4)$.

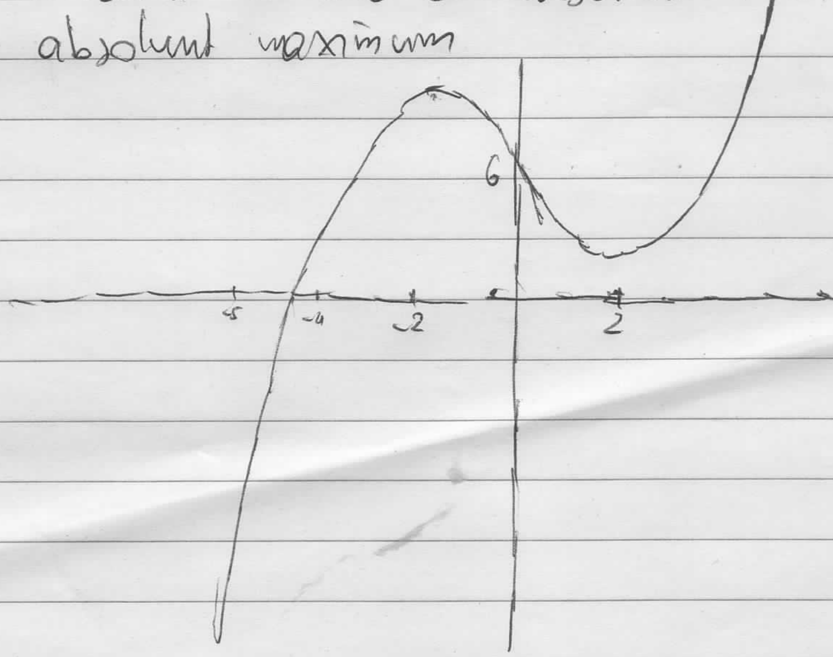
b) $f'(x) = x^2 - 4$. Tekenoverzicht f': $+ \quad {-2} \quad - \quad 2 \quad +$

f: $\nearrow \quad -2 \quad \searrow \quad 2 \quad \nearrow$

$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 = \frac{2}{3} > 0$

$f(-2) = -\frac{8}{3} + 8 + 6 = \frac{34}{3} > 0$ $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Dus f neemt in $x = 2$ een absoluut minimum aan en in $x = -2$ een absoluut maximum



c) f is stijgend voor $x \leq -2$ dus neemt ~~[illegible]~~ voor $x \leq -2$ hoogstens één nulpunt aan. f is dalend voor $-2 \leq x \leq 2$ maar blijft daarbij boven de x-as. f is stijgend voor $x \geq 2$. Dus f heeft buiten het in a) gevonden nulpunt geen andere nulpunten.

2) Er geldt $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$. We moeten dus het minimum bepalen van $f(x) = 16x^2 + 2x^{-1/2}$. Er geldt

$$f'(x) = 32x + 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} = 32x - x^{-3/2} = \frac{32x^{3/2} - 1}{x^{3/2}}$$

Tekenoverzicht f': $0 \quad - \quad 32^{2/5} \quad +$

$\searrow \quad 32^{2/5} = 4 \quad \nearrow$

f is minimaal voor $x=4$. De bijbehorende $x$waarde is $y=2$

(3) a) $\lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} f_c(x) = \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} c\,3^x = c\sqrt{3}$

$\lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} f_c(x) = \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} c^2 \cos(\frac{1}{3}\pi x) = \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} c^2 \cdot \cos\frac{1}{6}\pi = c^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow c\sqrt{3} = c^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2 - c = 0$

$\Leftrightarrow c(\frac{1}{2}c-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=0 \text{ of } c=2}$

b) f links continu voor $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} f_c(x) = f_c(\frac{1}{2}) = 1 \Leftrightarrow c\sqrt{3}=1$

$\Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

f rechts continu voor $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} f_c(x)=1 \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}=1$

$\Leftrightarrow c^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{c = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}}$

f is voor geen enkele waarde van c tegelijk linkscontinu en rechts continu, dus voor geen enkele waarde van c continu

(4) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - xe^x}{1-\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - xe^x - e^x}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - xe^x - e^x - e^x}{\cos x} = -\frac{2}{1} = \boxed{-2}$

b) Gebruik de worteltruc

$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\infty}+\underbrace{\sqrt{x}}_{\infty}} = \boxed{0}$

5

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln(x+x^2)$	$\ln 2$	$\ln 2$
1	$\frac{1}{x+x^2}\cdot(1+2x)=\frac{1+2x}{x+x^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{(x+x^2)\cdot 2-(1+2x)(1+2x)}{(x+x^2)^2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$

$$P_{2,1}(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2=\boxed{\ln 2+\frac{3}{2}(x-1)-\frac{5}{8}(x-1)^2}$$

6 a) De noemer van f is 0 alleen voor $x=1$.
Dus het domein van f is $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Tekenoverzicht f — NG +

$\lim_{x\downarrow 1} f(x)=\infty$, $\lim_{x\uparrow 1} f(x)=-\infty$

b) $x^7-1\,/\,x^8\,\backslash\,x$ $\qquad x^8=x\cdot(x^7-1)+x$

$\frac{x^8-x}{x}$ $\qquad f(x)=x+\frac{x}{x^7-1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^7-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-6}\to 0}{1-x^{-7}}=0$$

Dus $y=x$ is een schuine asymptoot van f zowel voor $x\to\infty$ als $x\to-\infty$

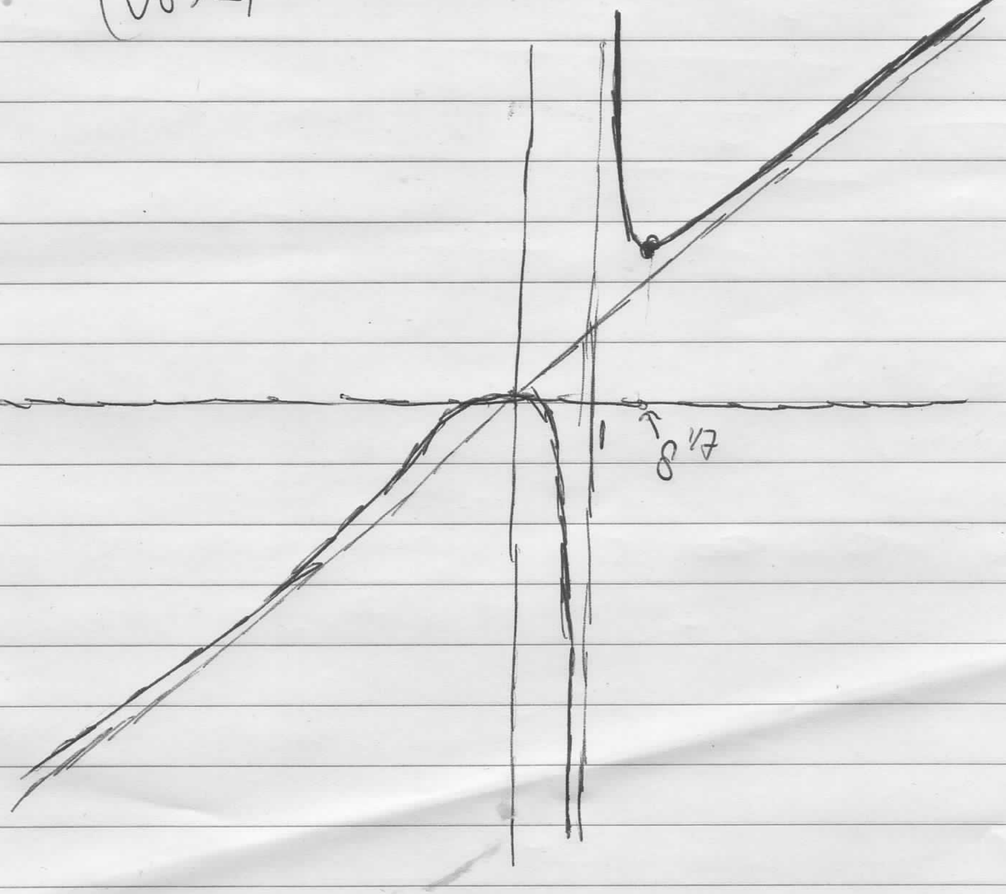
c) $$f'(x)=\frac{(x^7-1)\cdot 8x^7-x^8\cdot 7x^6}{(x^7-1)^2}=\frac{x^{14}-8x^7}{(x^7-1)^2}=\frac{x^7(x^7-8)}{(x^7-1)^2}$$

Tekenoverzicht f'

		0		1		$\sqrt[7]{8}$	
f'	+	0	−	NG	−	0	+
f	↗		↘		↘		↗

$f(0) = 0$ relatief maximum

$f(\sqrt[7]{8}) = \dfrac{(\sqrt[7]{8})^8}{(\sqrt[7]{8})^7 - 1} = \dfrac{8^{8/7}}{7} > 0$ relatief minimum



$f(x) - x = \dfrac{x}{x^7 - 1}$. Dus $f(x) = x \iff x = 0$,
dus de grafiek van f snijdt de schuine asymptoot van f alleen in $x = 0$.