①

UITWERKING HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1
27-1-2020

① Feit. Zij $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ een rationale functie, met $p(x), q(x)$ polynomen.
Als graad $p \leq$ graad q dan heeft f een horizontale asymptoot voor $x \to \pm\infty$, en als graad p = graad $q+1$, dan heeft f een schreve asymptoot voor $x \to \pm\infty$.
Dus als $n=1$ of 2 dan heeft $f(x)$ horizontale asymptoten en als $n=3$ dan heeft $f(x)$ schreve asymptoten

$\underline{n=1}$ $f_1(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$

Dus $\boxed{y=0}$ is een horizontale asymptoot van f_1 voor $x \to \pm\infty$

$\underline{n=2}$ $f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$ $\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$

Dus $\boxed{y=1}$ is een horizontale asymptoot van f_2 voor $x \to \pm\infty$

$\underline{n=3}$ $f_3(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$

$$\begin{array}{l|l} x^2+\cancel{x+1}/x^3 & x-1 \\ \underline{x^3+x^2+x} - & \\ -x^2-x & \\ \underline{-x^2-x-1} & \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 = (x^2+x+1)(x-1)+1$

$f_3(x) = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f_3(x)-(x-1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = 0$

Dus $\boxed{y=x-1}$ is een schreve asymptoot van f_3 voor $x \to \pm\infty$

② Er geldt $y=1-x$, $y\geq 0$, dus $0\leq x\leq 1$ en $x^2+2y^2 = x^2+2(1-x)^2$.
We moeten het minimum en maximum bepalen van
$f(x) = x^2+2(1-x)^2 = x^2+2(1-2x+x^2) = 3x^2-4x+2$ op $[0,1]$. Er geldt:
$f'(x) = 6x-4$ tekenoverzicht

$$\begin{array}{c|ccccc} f' & 0 & - & \frac{2}{3} & + & 1 \\ f & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$$

Verder is $f(0)=1$, $f(1)=2$
Dus $f(x)$ neemt een absoluut minimum aan voor $x=\frac{2}{3}$, dan is $y=\frac{1}{3}$; een relatief maximum voor $x=0$; dan is $y=1$; en een absoluut maximum voor $y=1$; dan is $x=0$
Dus x^2+2y^2 is minimaal voor $\boxed{(x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$ en maximaal voor $\boxed{(x,y)=(0,1)}$

3 a) Eventuele geheeltallige nulpunten van f zijn delers van 22, dus $\pm1, \pm2, \pm11, \pm22$.
Er geldt: $f(1)=-20$, $f(-1)=-24$, $f(2)=0$. Dus $\boxed{x=2}$ is een nulpunt van f

b) Er geldt: $f'(x)=5x^4-6x^2+3$. Substitueren we $u=x^2$ dan krijgen we $5u^2-6u+3$. Deze heeft discriminant $6^2-4\times5\times3=36-60=-24<0$. Dus $5u^2-6u+3$ heeft geen nulpunten en is altijd >0. Dus $f'(x)>0$ voor alle x, $f(x)$ is stijgend voor alle x, $f(x)$ heeft geen extremen, en $f(x)$ heeft buiten $x=2$ geen nulpunten

4 a) $\lim_{x\uparrow0} f_c(x)=\ln e^c=c$, $\lim_{x\downarrow0} f_c(x)=c^2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}c^2$

Dus $\lim_{x\to0} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow c^2=2c \Leftrightarrow c^2-2c=0 \Leftrightarrow c(c-2)=0$
$\Leftrightarrow \boxed{c=0 \text{ of } c=2}$

b) f_c continu in $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to0} f_c(x)$ bestaat en is gelijk aan $f_c(0)$
In ieder geval moet $c=0$ of $c=2$ zijn
$c=0$: $f_c(0)=0^3=0$, $\lim_{x\to0} f_c(x)=0$, dus f_c continu in $x=0$
$c=2$: $f_c(2)=2^3=8$, $\lim_{x\to0} f_c(x)=2$, dus f_c dis continu in $x=0$

Dus f_c continu in $x=0 \Leftrightarrow \boxed{c=0}$

5 a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{e^{2x} - 2e^x + 1} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \dfrac{-2\sin 2x + \sin x}{2e^{2x} - 2e^x} \overset{H}{\underset{0/0}{=}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-4\cos 2x + \cos x}{4e^{2x} - 2e^x} = \dfrac{-4+1}{4-2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3^x + 2^x + x}{3^x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1 + 2^x/3^x + x/3^x}{1 + x^{1/2}/3^x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{x}{3^x}\right)}{1 + \frac{x^{1/2}}{3^x}}$ $\to 0$ $\to 0$ $\to 0$

$= \boxed{1}$

6 a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x} = \dfrac{1}{x(x^2-3)} = \dfrac{1}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

Domein van f: $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$,

Verticale asymptoten: $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$

Tekenoverzicht f:

$$\begin{array}{ccccccc} - & NG & + & NG & - & NG & + \\ & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \\ x<0 & & x<0 & & x>0 & & x>0 \\ x^2-3>0 & & x^2-3<0 & & x^2-3<0 & & x^2-3>0 \end{array}$$

Dus $\lim_{x\uparrow -\sqrt{3}} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\downarrow -\sqrt{3}} = \infty$, $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty$,

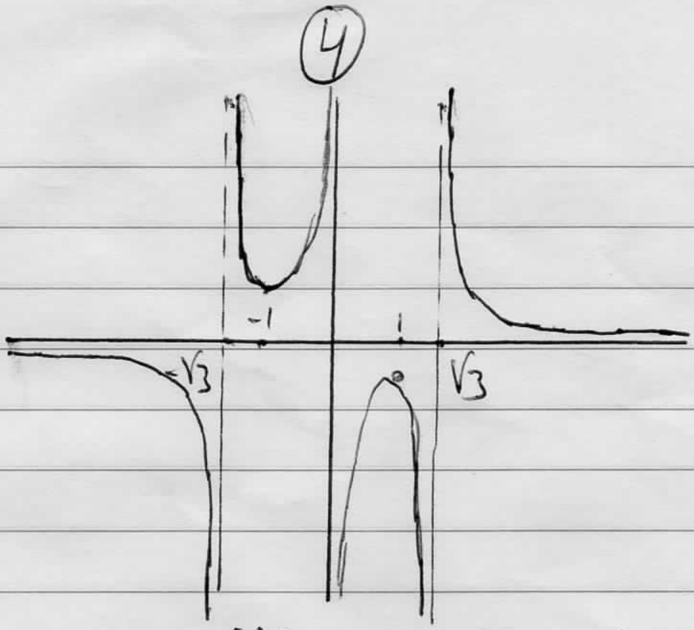
$\lim_{x\uparrow\sqrt{3}} = -\infty$, $\lim_{x\downarrow\sqrt{3}} = \infty$

b) f heeft alleen horizontale asymptoten voor $x\to\pm\infty$,
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^3-3x} = 0$. Dus $\boxed{y=0}$ horizontale asymptoot voor $x\to\pm\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{-(x^3-3x)'}{(x^3-3x)^2} = \dfrac{-3x^2+3}{(x^2-3x)^2}$ tekenoverzicht f'

$$\begin{array}{cccccccccccc} - & NG & - & 0 & + & NG & + & 0 & - & NG & - \\ & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} & \\ f: & \downarrow & \downarrow & & \nearrow & & \nearrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

extremen: $f(1) = -\frac{1}{2}$ relatief maximum
$f(-1) = \frac{1}{2}$ relatief minimum



7 a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x)$	0	0
1	$(1+x)^{-1}$	1	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$2(1+x)^{-3}$	2	$\frac{1}{3}$
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6	$-\frac{1}{4}$

$$P_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

b) $R_{4,0}(x) = \dfrac{-6(1+\xi)^{-4}}{4!}x^4 = -\frac{1}{4}(1+\xi)^{-4}\cdot x^4$, ξ tussen 0 en x.

c) Algemeen: $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$, hier:

$\ln(1+x) = P_{3,0}(x) + R_{4,0}(x)$.

Dus $|\ln(1+0{,}0001) - P_{3,0}(0{,}0001)| = |R_{4,0}(0{,}0001)|$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}(1+\xi)^{-4}}_{0<\xi<0{,}0001}(0{,}0001)^4 \le \frac{1}{4}(10^{-4})^4 \le \frac{1}{4}10^{-16}.$$