HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1, 22-12-2020

①a) Eventuele geheeltallige nulpunten zijn een positieve of negatieve deler van 7, dus $\pm 1, \pm 7$
Er geldt: $f(1) = 1-3+3+7 = 8$, $f(-1) = -1-3-3+7 = 0$.
Dus -1 is een nulpunt van f, en $f(x)$ is deelbaar door $x-(-1) = x+1$

$$
\begin{array}{l|l|l}
x+1 & x^3-3x^2+3x+7 & x^2-4x+7 \\
 & \underline{x^3+x^2} \; - & \\
 & -4x^2+3x+7 & \\
 & \underline{-4x^2-4x} \; - & \\
 & 7x+7 & \\
 & \underline{7x+7} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

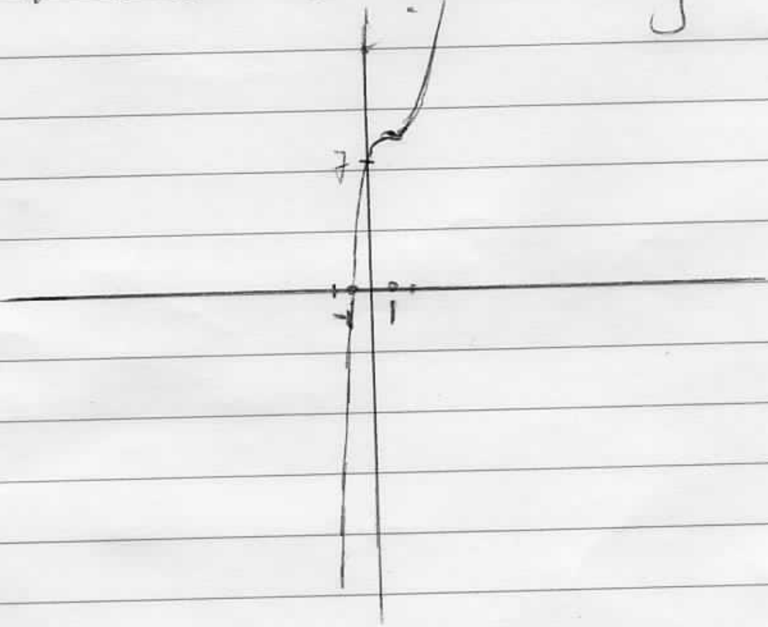
$x^3-3x^2+3x+7 = (x+1)(x^2-4x+7)$

x^2-4x+7 heeft discriminant $4^2-4\cdot1\cdot7 = -12<0$, dus x^2-4x+7 heeft geen nulpunten. Het enige nulpunt van $f(x)$ is $\boxed{x=-1}$

b) $f'(x) = 3x^2-6x+3 = 3(x-1)^2$
Tekenoverzicht f'

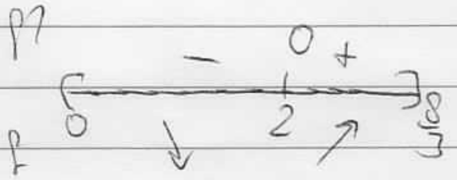
f'	+	0	+	
f	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

f is stijgend met een horizontale raaklijn in $x=1$, $f(1)=8$



c) Laat $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$. g is continu, $g(-1) = -1 - 3 - 3 + 6 = -1 < 0$, $g(0) = 6 > 0$. Volgens de tussenwaardestelling heeft g een nulpunt in $(-1, 0)$.

2 Er geldt $y = 8 - 3x$. Omdat $x \geq 0, y \geq 0$ is $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.
We moeten dus het maximum ~~minimum~~ bepalen van
$f(x) = x^3 + (8-3x)^2$ op $[0, \frac{8}{3}]$
Er geldt $f'(x) = 3x^2 - 6(8-3x) = 3x^2 + 18x - 48 = 3(x^2 + 6x - 16)$
$= 3(x-2)(x+8)$



Uit het tekenoverzicht blijkt dat $f(x)$ zijn minimum aanneemt in $x = 2$

Dus $\boxed{x = 2, \ y = 2}$

3 a) $\lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = 2^{c^2+2}$
f_c linkscontinu in $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 2^{c^2+2} = 8^c = 2^{3c}$

$\Leftrightarrow c^2 + 2 = 3c \Leftrightarrow c^2 - 3c + 2 = 0 \Leftrightarrow (c-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 1 \text{ of } c = 2}$

$\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} 8^{c^3 + (x-1)/3x} = 8^{c^3}$
f_c rechtscontinu in $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 8^{c^3} = 8^c$
$\Leftrightarrow c^3 = c \Leftrightarrow c^3 - c = 0 \Leftrightarrow c(c^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow c(c+1)(c-1) = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{c = 0 \text{ of } c = 1 \text{ of } c = -1}$

f_c continu in $x = 1 \Leftrightarrow f_c$ links-continu in $x = 1$ en rechtscontinu in $x = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$

3b) $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^{1+2x} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} 8^{1+(x-1)/3x} = 8^{1+1/3} = 8^{4/3} = (2^3)^{4/3} = 2^4 = \boxed{16}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-1/x}{3} = \frac{1}{3}$

4 a) $\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)-2x}{e^{2x}-1-2x-2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{2\cos 2x-2}{2e^{2x}-2-4x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\lim_{x\to0} \frac{-4\sin 2x}{4e^{2x}-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{-8\cos 2x}{8 e^{2x}} = -\frac{8}{8} = \boxed{-1}$

b) $(1+5x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+5x)} \to e^5$, want

$\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ln(1+5x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{5(1+5x)}{1} = 5$

5 a) domein: noemer $\neq 0$ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

tekenoverzicht f

	1	
$-$	|	$+$
$x^7-1<0$		$x^7-1>0$
$x^8>0$		$x^8>0$

verticale asymptoot teller $\neq 0$, noemer $=0$: $x=1$

$\lim_{x\downarrow1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\uparrow1} f(x) = -\infty$ (zie tekenoverzicht)

b) f heeft een schuine asymptoot voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$
want graad teller $= 1 +$ graad noemer

$x^7-1 \,/\, x^8 \,\backslash\, x$
$x^8 - x$
x

$x^8 = x(x^7-1)+x$

$f(x) = x + \frac{x}{x^7-1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^7-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{-6}}{1-x^{-7}} = 0$

Dus $y=x$ is de schuine asymptoot van f voor $x\to-\infty$, $x\to\infty$

5b) snijpunt van de scheve asymptoot met de grafiek van f:
$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{x^7-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dus dit snijpunt is $(0,0)$

5c) $f'(x) = \frac{(x^7-1)8x^7 - x^8 \cdot 7x^6}{(x^7-1)^2} = \frac{x^{14}-8x^7}{(x^7-1)^2} = \frac{x^7(x^7-8)}{(x^7-1)^2}$

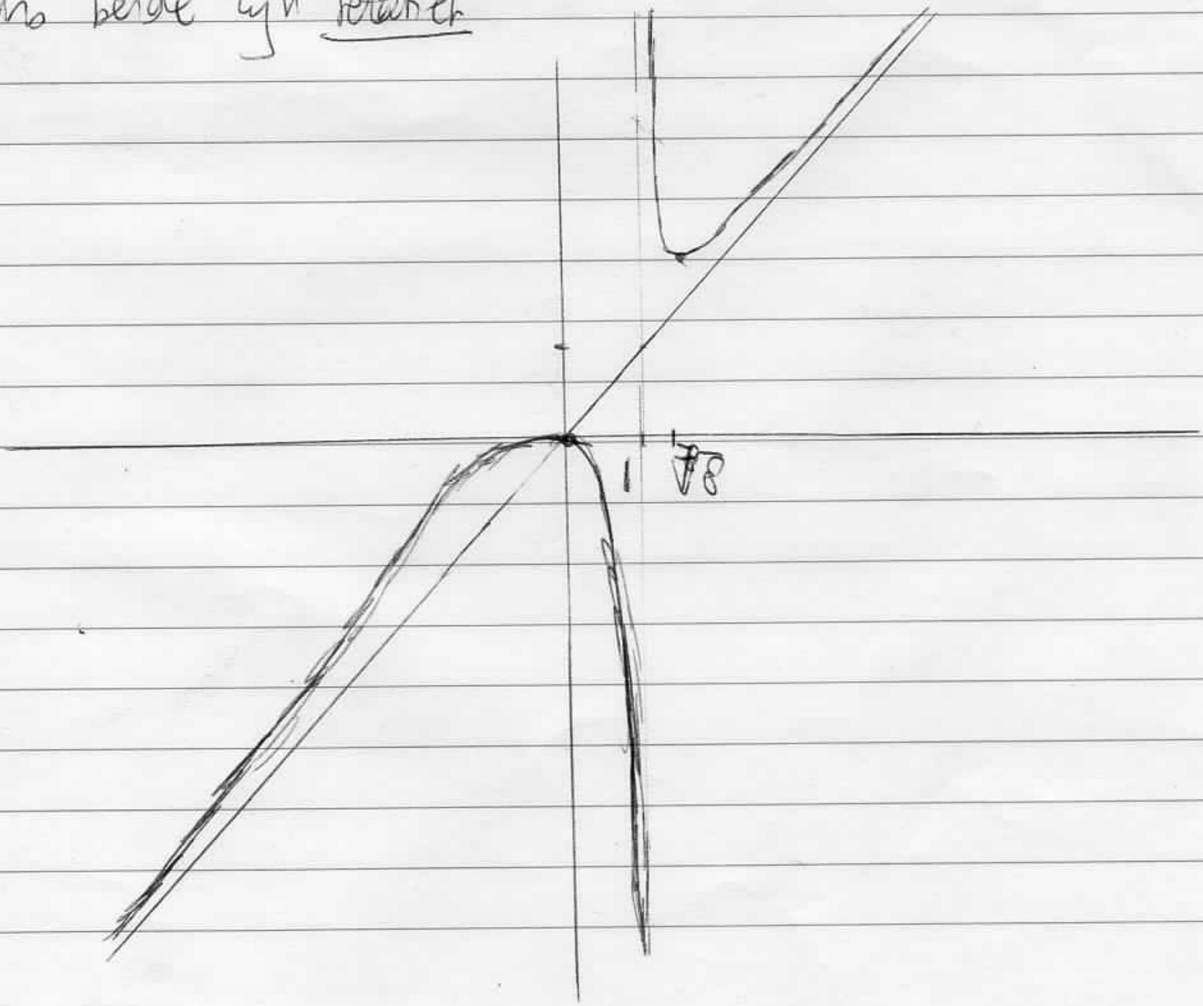
tekenoverzicht f'

x		0		1		$\sqrt[7]{8}$	
f'	+	0	−	NG	−	0	+
f	↗		↘		↘		↗
	$x^7<0$, $x^7-8<0$				$x^7>0$, $x^7-8<0$		$x^7>0$, $x^7-8>0$

f neemt in $x=0$ een <u>maximum</u> aan, $f(0)=0$
f neemt in $x=\sqrt[7]{8}$ een <u>minimum</u> aan, $f(\sqrt[7]{8}) = \frac{(\sqrt[7]{8})^8}{(\sqrt[7]{8})^7-1} = \frac{8\sqrt[7]{8}}{7}$

Het minimum is groter dan het maximum, dus beide zijn <u>relatief</u>

5d)



6 a) $f(x) = x^{1/4} + x^{1/5}$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$

$f''(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right)x^{-7/4} + \frac{1}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right)x^{-9/5} = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}} - \frac{4}{25}x^{-9/5}$

$f'''(x) = \left(-\frac{3}{16}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right)x^{-\frac{11}{4}} + \left(-\frac{4}{25}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)x^{-\frac{14}{5}}$

$= \frac{21}{64}x^{-\frac{11}{4}} + \frac{36}{125}x^{-\frac{14}{5}}$

b)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$x^{1/4} + x^{1/5}$	2	2
1	$\frac{1}{4}x^{-3/4} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$
2	$-\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}} - \frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}}$	$-\frac{139}{400}$	$-\frac{139}{800}$

$P_{2,1}(x) = \cancel{2 + \frac{9}{20}(}\ f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$

$= 2 + \frac{9}{20}(x-1) - \frac{139}{800}(x-1)^2$

c) $R_{3,1}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-1)^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{21}{64}s^{-\frac{11}{4}} + \frac{36}{125}s^{-\frac{14}{5}}\right)(x-1)^3$

$= \left(\frac{7}{128}s^{-11/4} + \frac{6}{125}s^{-14/5}\right)(x-1)^3$ s tussen 1 en x