1E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE

Uiterste inleverdatum vrijdag 18 september, 14:15

N.B. Je moet de hele uitwerking opschrijven en niet alleen het antwoord geven.
Handgeschreven (mits goed leesbaar) en getypt mag alletwee.
Zet je voornaam en achternaam (beide in HOOFDLETTERS) en studentnummer op het huiswerk.
Maak één pdf van je hele huiswerk. Je mag geen aparte foto's van elk blaadje inleveren.
Na de huiswerkopgaven staan enkele uitgewerkte voorbeeldopgaven.

Opgave 1. Bereken met behulp van een staartdeling, dat wil zeggen schrijf de rationale functies in de vorm polynoom + teller/noemer met graad teller < graad noemer:

$$\frac{x^6+8}{x^4+1}.$$

Opgave 2. Bepaal de nulpunten van $x^3 - x^2 - 5x + 2$.

Opgave 3. Schrijf de volgende uitdrukkingen als quotiënt van twee polynomen:

i) $\dfrac{x+1}{x+6} - \dfrac{x+4}{x+1}$; **ii)** $\dfrac{(x+3)/x}{(x^2+2)/x}$.

Opgave 4. Van een hoek α is gegeven dat $\cos\alpha = 4/5$ en $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$. Bereken $\sin\alpha$ en $\tan\alpha$.

Opgave 5. Bereken $\cos\dfrac{93}{4}\pi$, $\cos\dfrac{13}{8}\pi$ (exacte uitdrukkingen, geen decimalen).

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. Bereken met behulp van een staartdeling $\dfrac{x^5+3x^2-2}{x^2+2}$, dat wil zeggen schrijf het in de vorm polynoom + $\dfrac{\text{teller}}{\text{noemer}}$ waarbij de graad van de teller kleiner is dan die van de noemer.

Oplossing. Voer de staartdeling uit:

$$
\begin{array}{lll}
x^2+2/ & x^5+3x^2-2 \quad \backslash x^3-2x+3 & \\
 & x^5+2x^3 & \text{trek } x^3(x^2+2)=x^5+2x^3 \text{ af om de term met de} \\
 & \underline{\hspace{3cm}}\ - & \text{hoogste macht van } x\text{, dat is } x^5\text{, kwijt te raken;} \\
 & -2x^3+3x^2-2 & \\
 & -2x^3-4x & \text{trek } -2x(x^2+2)=-2x^3-4x \text{ af om } -2x^3 \\
 & \underline{\hspace{3cm}}\ - & \text{kwijt te raken;} \\
 & 3x^2+4x-2 & \\
 & 3x^2+6 & \text{trek } 3(x^2+2)=3x^2+6 \text{ af om } 3x^2 \\
 & \underline{\hspace{3cm}}\ - & \text{kwijt te raken;} \\
 & 4x-8 & \\
 & & \text{we kunnen de term met de hoogste macht van } x \\
 & & \text{in } 4x-8\text{, dat is } 4x\text{, niet meer kwijtraken door} \\
 & & \text{een veelvoud van } x^2+2 \text{ af te trekken; dus de} \\
 & & \text{staartdeling eindigt hier.}
\end{array}
$$

We hebben in bovenstaande staartdeling in totaal $(x^3-2x+3)(x^2+2)$ afgetrokken van x^5+3x^2-2 en een rest $4x-8$ overgehouden.
Met andere woorden, $x^5+3x^2-2=(x^3-2x+3)(x^2+2)+4x-8$. Dus

$$\frac{x^5+3x^2-2}{x^2+2}=\frac{(x^3-2x+3)(x^2+2)+4x-8}{x^2+2}=x^3-2x+3+\frac{4x-8}{x^2+2}.$$

Toepassing: Als x heel groot is, dan is $\dfrac{4x-8}{x^2+2}$ heel klein, en dus is x^3-2x+3 een goede benadering van $\dfrac{x^5+3x^2-2}{x^2+2}$.

Opgave 2. Vind de nulpunten van x^4+x^2-2.

Oplossing. Laat $y=x^2$. Dan moeten we eerst de nulpunten vinden van y^2+y-2 en daarna, voor elk van de gevonden waarden van y, de waarden van x met $x^2=y$. Uit de ontbinding $y^2+y-2=(y-1)(y+2)$ of de abc-formule leiden we af dat y^2+y-2 de twee nulpunten $y=1$ en $y=-2$ heeft. Uit $x^2=1$ leiden we af dat $x=1$ of $x=-1$. Er zijn geen reële getallen x met $x^2=-2$. Dus de enige reële nulpunten van x^4+x^2-2 zijn $x=1$, $x=-1$.

Opmerking. In Continue wiskunde 2 zullen we de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen uitbreiden tot de verzameling $\mathbb{C}$ van *complexe getallen*, deze bestaat uit alle getallen van de vorm $a + bi$ waarbij $i^2 = -1$, en waarbij a, b alle reële getallen doorlopen. In $\mathbb{C}$ heeft $x^4 + x^2 - 2$ naast ± 1 ook de nulpunten $\pm\sqrt{2}i$.

Opgave 3. Vind de nulpunten van $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4$.

Oplossing. Dit polynoom hoeft geen gehele nulpunten te hebben maar **als** het een geheel nulpunt heeft dan is dat een positieve of negatieve deler van de laatste term -4. Dus mogelijke gehele nulpunten zijn ± 1, ± 2, ± 4.
Door invullen zien we dat $x = 1$, $x = -1$ geen nulpunten zijn, maar $x = 2$ wel.
Hieruit volgt dat $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4$ deelbaar is door $x - 2$, dat wil zeggen, als we een staartdeling uitvoeren is de rest 0.
Met behulp van een staartdeling vinden we

$$\begin{array}{lll} x-2 & /x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 & \backslash x^3 - 2x^2 - 7x + 2 \\ & \qquad \cdots & \\ & \qquad \underline{\qquad\qquad} - & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Dus

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = (x^3 - 2x^2 - 7x + 2)(x - 2).$$

Dit betekent $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$ of $x - 2 = 0$. Dus om de andere nulpunten van $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4$ te vinden moeten we de nulpunten van $x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ bepalen.

Mogelijke gehele nulpunten van $x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ zijn positieve of negatieve delers van 2, dus ± 1, ± 2. Het blijkt dat $x = -2$ een nulpunt is. Dus $x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ is deelbaar door $x - (-2) = x + 2$. Met behulp van een staartdeling als boven vinden we

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x^2 - 4x + 1)(x + 2).$$

Dus $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4 = (x^3 - 2x^2 - 7x + 2)(x - 2) = (x^2 - 4x + 1)(x + 2)(x - 2)$.

We hebben nu twee nulpunten gevonden, namelijk $x = 2$, $x = -2$. Uit $x^2 - 4x + 1$ vinden we de andere nulpunten, Volgens de abc-formule heeft $x^2 - 4x + 1$ nulpunten

$$\frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

(nl. $\sqrt{12} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$).
Dus $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 16x - 4$ heeft nulpunten $x = 2$, $x = -2$, $x = 2 + \sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$.

Opgave 4. Schrijf $\dfrac{x+2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1}$ als quotiënt van twee polynomen.

Oplossing. Breng de breuken onder één noemer en tel de tellers op:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+1}+\frac{1}{x-1} &= \frac{(x+2)(x-1)+1\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}\\ &= \frac{x^2+x-2+x^2+1}{x^3+x-x^2-1}=\frac{2x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}.\end{aligned}$$

Opgave 5. Schrijf $\dfrac{(x-1)/(2x-1)}{x^2/(x+1)}$ als quotiënt van twee polynomen.

Oplossing. Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde:

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)/(2x-1)}{x^2/(x+1)} &= \frac{x-1}{2x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2}\\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{(2x-1)x^2}=\frac{x^2-1}{2x^3-x^2}.\end{aligned}$$

Opgave 6. Van een hoek α is gegeven dat $\sin\alpha = 9/41$ en $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$. Bepaal $\cos\alpha$ en $\tan\alpha$.

Oplossing. Er geldt $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, dus

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{9}{41}\right)^2 = 1-\frac{81}{1681}=\frac{1600}{1681}=\left(\frac{40}{41}\right)^2.$$

Omdat $\frac{1}{2}\pi < \cos\alpha < \pi$ is $\cos\alpha$ negatief.
Dus $\cos\alpha = -40/41$ en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{9/41}{-40/41} = -9/40$.

Opgave 7. Van een hoek α is gegeven dat $\tan\alpha = t$ en $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Bereken $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

Oplossing. Er geldt $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=t$, dus $\sin\alpha = t\cos\alpha$. We vullen dit in in de formule $\sin^2\alpha+\cos^s\alpha=1$. Dit geeft

$$(t\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1,\ \text{ofwel } t^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ ofwel } (t^2+1)\cos^2\alpha=1,$$
$$\text{ofwel } \cos^2\alpha=\frac{1}{t^2+1}.$$

Uit de aanname $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ volgt dat $\cos\alpha$ positief is. Dus $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.
Door nu weer te gebruiken dat $\sin\alpha = t\cos\alpha$ vinden we dat $\sin\alpha = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

Opgave 8. *Bereken* $\cos -\dfrac{45}{4}\pi,\quad \sin\dfrac{5}{12}\pi.$

Oplossing. $-\frac{45}{4} = -11\frac{1}{4} = -12 + \frac{3}{4}$. Dus
$$\cos -\tfrac{45}{4}\pi = \cos(-12\pi + \tfrac{3}{4}\pi) = \cos \tfrac{3}{4}\pi = \cos(\pi - \tfrac{1}{4}\pi) = -\cos \tfrac{1}{4}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$
Voor het tweede deel van de opgave gebruiken we de somformule
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ met $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\beta = \frac{1}{6}\pi$. Dit geeft
$$\begin{aligned} \sin \tfrac{5}{12}\pi &= \sin(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{6}\pi) = \sin \tfrac{1}{4}\pi \cdot \cos \tfrac{1}{6}\pi + \sin \tfrac{1}{6}\pi \cos \tfrac{1}{4}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Opgave 9. Bereken $\cos \dfrac{7}{8}\pi$, $\sin \dfrac{7}{8}\pi$, $\tan \dfrac{7}{8}\pi$.

Oplossing. Pas de formules $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ toe met $x = \frac{7}{8}\pi$.
Er geldt $\cos \frac{7}{4}\pi = \cos(\frac{7}{4}\pi - 2\pi) = \cos -\frac{1}{4}\pi = \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Noem $\cos \frac{7}{8}\pi$ even c en $\sin \frac{7}{8}\pi$ s. Dan $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2c^2 - 1 = 1 - 2s^2$, ofwel $c^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $s^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$.
De hoek $\frac{7}{8}\pi$ ligt tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π, dus de cosinus daarvan is negatief en de sinus positief. Dit geeft
$$\cos \tfrac{7}{8}\pi = -\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}, \quad \sin \tfrac{7}{8}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}},$$
en tenslotte
$$\tan \tfrac{7}{8}\pi = \frac{\sin \frac{7}{8}\pi}{\cos \frac{7}{8}\pi} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \quad \text{(gebruik dat } \tfrac{1}{2} = \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\text{)}.$$

Opgave 10. Druk $\sin(\frac{1}{4}\pi - 2x)$ uit in $\sin x$ en $\cos x$.

Oplossing. Gebruik eerst de somformule. Dit geeft
$$\sin(\frac{1}{4}\pi - 2x) = \sin \tfrac{1}{4}\pi \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sin 2x.$$
Vul nu de verdubbelingsformules $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ in (andere uitdrukkingen zijn ook mogelijk). Dan vinden we
$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{1}{4}\pi - 2x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(2\cos^2 x - 1) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2\sin x \cos x \\ &= \sqrt{2}\cos^2 x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin x \cos x. \end{aligned}$$