2E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE

Uiterste inleverdatum vrijdag 25 september, 14:15

N.B. Je moet de hele uitwerking opschrijven en niet alleen het antwoord geven.
Handgeschreven (mits goed leesbaar) en getypt mag alletwee.
Zet je voornaam en achternaam (beide in HOOFDLETTERS) en studentnummer op het huiswerk.
Maak één pdf van je hele huiswerk. Je mag geen aparte foto's van elk blaadje inleveren.
Na de huiswerkopgaven staan enkele uitgewerkte voorbeeldopgaven.

• Voor degenen die wel eens van de regel van L'Hôpital hebben gehoord: je mag die nog niet gebruiken, die komt pas later in het college ter sprake.
• Na de huiswerkopgaven staan uitgewerkte voorbeelden.

Opgave 1. *Bepaal het bereik van de onderstaande functies. Ga na of deze functies inverteerbaar zijn en zo ja bepaal hun inverse:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^{13}$;

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R} : \ f(x) = \dfrac{6x}{3x-1}$.

Opgave 2. *Schrijf de volgende getallen als een geheel getal of een breuk:*
$^{\sqrt{3}}\log 81^{3/4}$; $\quad {}^2\log \dfrac{7}{2} - {}^2\log 5 + {}^2\log \dfrac{20}{7}$.

Opgave 3. *Bereken de volgende limieten:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-7x+10}$ $\qquad$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}$

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. *Bepaal het bereik van de onderstaande functies. Ga na of deze functies inverteerbaar zijn en zo ja bepaal hun inverse:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt[3]{x+1}$;
ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 5$;
iii) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 5$;
iv) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$.

Oplossing. Schrijf $y = f(x)$. Probeer x uit te drukken in y. De waarden van y waarvoor dit mogelijk is geven het bereik van f. Als we voor elke y precies één x vinden met $f(x) = y$ dan is f inverteerbaar. De inverse f^{-1} krijgen we dan door x en y om te draaien. Het domein van f^{-1} is hetzelfde als het bereik van f, en het bereik van f^{-1} is hetzelfde als het domein van f.

i)Neem $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Schrijf $y = \sqrt[3]{x+1}$. Er geldt:

$$y = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow y^3 = x + 1 \Leftrightarrow x = y^3 - 1.$$

Dus voor elke $y \in \mathbb{R}$ kunnen we x in y uitdrukken. Dus het bereik van f is $\mathbb{R}$. Voor elke y vinden we precies één x, namelijk $x = y^3 - 1$. Dus f is inverteerbaar. De inverse van f is $f^{-1}(x) = x^3 - 1$.

ii) en iii) Neem $f(x) = x^2 + 5$. Er geldt:

$$y = x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 = y - 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-5} \text{ mits } y \geq 5.$$

We kunnen x alleen in y uitdrukken als $y \geq 5$. Dus het bereik van f is $[5, \infty)$. Wanneer het domein van f $\mathbb{R}$ is, dan vinden we voor x twee waarden, namelijk $x = \pm\sqrt{y-5}$ en is f niet inverteerbaar. Nemen we voor het domein van f $(-\infty, 0]$ dan laten we alleen waarden van x toe die ≤ 0 zijn, en dan blijft alleen $x = -\sqrt{y-5}$ over. In dat geval is f wel inverteerbaar, en is de inverse $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-5}$. Het domein van f^{-1} is het bereik van f, dat wil zeggen $[5, \infty)$. Het bereik van f^{-1} is het domein van f, dat wil zeggen $(-\infty, 0]$.

iv) Neem $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$, $x \neq 1$. Er geldt

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad y^3 = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)y^3 = x \Leftrightarrow xy^3 - y^3 = x \Leftrightarrow xy^3 - x = y^3 \\ &\Leftrightarrow \quad x(y^3 - 1) = y^3 \Leftrightarrow x = \frac{y^3}{y^3 - 1} \text{ mits } y^3 \neq 1, \text{ d.w.z. } y \neq 1. \end{aligned}$$

We kunnen x alleen uitdrukken in y als $y \neq 1$. Dus het bereik van f is $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Voor elke y uit het bereik vinden we precies één waarde voor x, namelijk $\frac{y^3}{y^3-1}$. Dus f is inverteerbaar, en $f^{-1}(x) = \frac{x^3}{x^3-1}$. Het domein van f^{-1} is het bereik van f, dus $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Het bereik van f^{-1} is het domein van f, dus ook $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Opgave 2. Bereken $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$.

Oplossing. Algemeen geldt: als een polynoom $p(x)$ een nulpunt a heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = (x - a)$(ander polynoom). We vinden dat andere polynoom door een staartdeling.
Zowel uit $x^3 - 1$ als $x^4 - 1$ kun je de factor $x - 1$ wegdelen omdat ze beide nulpunt 1 hebben.
Er geldt $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. Dus

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

In de limiet laten we x naar 1 naderen, maar x wordt niet gelijk aan 1, dus $x - 1$ wordt niet gelijk aan 0. We mogen dus $x - 1$ uit de teller en noemer wegdelen.

BELANGRIJKE OPMERKING:
vergeet niet bij elke stap in het berekenen van een limiet $\lim_{x \to \cdot}$ voor de uitdrukking te zetten.
Bijvoorbeeld de schrijfwijze $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = x = 0$ is fout, want $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$ is een getal, en x is een functie.
Je moet dus schrijven $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$.

Opgave 3. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$.

Oplossing. We gebruiken hier de worteltruc: als er in de limiet iets staat met $\sqrt{\cdots} - \sqrt{\cdots}$, vermenigvuldig teller en noemer dan met de som van de wortels. We gebruiken de regel

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Dit geeft

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+4}-4)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)-2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$