3E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE

Inleverdatum vrijdag 2 oktober, 14:15

N.B. Je moet de hele uitwerking opschrijven en niet alleen het antwoord geven. Handgeschreven (mits goed leesbaar) en getypt mag alletwee.
Zet je voornaam en achternaam (beide in HOOFDLETTERS) en studentnummer op het huiswerk.
Maak één pdf van je hele huiswerk. Je mag geen aparte foto's van elk blaadje inleveren.
Na de huiswerkopgaven staan enkele uitgewerkte voorbeeldopgaven.

Opgave 1. Bereken de volgende limieten:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x^{13}+x}{6x^{13}+x^{12}}$, b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{10^x+x}{10^x+9^x}$.

Opgave 2. Bepaal de verticale asymptoten van $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-5x+6}$. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x\uparrow a} f(x)$.

Opgave 3. De functie f is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 2k + 3\cos x & (x < 0); \\ k^2 & (x = 0); \\ 7 + k \cdot 6^{3x+1} & (x > 0). \end{cases}$$

a) Bepaal $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ en $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$.
b) Bepaal de waarde(n) van k waarvoor $f(x)$ rechts-continu is in $x = 0$, de waarden van k waarvoor $f(x)$ links-continu is in $x = 0$, en de waarden van k waarvoor $f(x)$ continu is in $x = 0$.

Opgave 4. Gegeven is de functie $f(x) = x^3 + 5x - 5$.
a) Leg uit waarom f hoogstens één nulpunt heeft.
b) Laat zien dat f een nulpunt heeft in $[0, 1]$. Ligt dit nulpunt in $[0, \frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2}, 1]$?
c) Geef een interval van lengte 1/8 waarin dit nulpunt ligt.

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-1}{5x^3+x^2\sqrt{x}}$.

Oplossing. Deel teller en noemer door de snelstgroeiende term in de noemer. Je hoeft hierbij niet op constanten te letten. $x^2\sqrt{x} = x^{5/2}$ groeit langzamer dan x^3. Dus je moet teller en noemer delen door x^3. Dit geeft

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-1}{5x^3+x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-x^{-3}}{5+x^{-1/2}} = \frac{3}{5}.$$

In dit voorbeeld is $y = \frac{3}{5}$ een horizontale asymptoot voor $x \to \infty$ van $f(x) = \dfrac{3x^3-1}{5x^3+x^2\sqrt{x}}$.

Opgave 2. Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6^{x+1}+5^x}{6^x+x}$.

Oplossing. Deel weer teller en noemer door de snelst groeiende term in de noemer, dat is 6^x. Dit geeft

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6^{x+1}+5^x}{6^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+5^x/6^x}{1+x/6^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+(5/6)^x}{1+x/6^x} = 6,$$

want $\lim\limits_{x\to\infty} (5/6)^x = 0$ en $\lim\limits_{x\to\infty} x/6^x = 0$.

Opgave 3. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2} = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$. Bepaal de verticale asymptoten van f, en bepaal $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x)$ voor elke verticale asymptoot $x = a$ van f.

Oplossing. $f(x)$ heeft een verticale asymptoot $x = a$ voor elke waarde van a waar de teller niet gelijk is aan 0 en de noemer wel gelijk is aan 0, dus in dit voorbeeld $x = -1$ en $x = 2$.

Om de limieten uit te rekenen bepalen we eerst het tekenoverzicht van f. De teller van f is 0 als $x = 0$ en de noemer van f is 0 als $x = -1$ of $x = 2$. Verder geldt:

$$\begin{array}{rll}
x > 2 & \Rightarrow x^3 > 0,\ x+1 > 0,\ x-2 > 0 & \Rightarrow f(x) > 0 \\
0 < x < 2 & \Rightarrow x^3 > 0,\ x+1 > 0,\ x-2 < 0 & \Rightarrow f(x) < 0 \\
-1 < x < 0 & \Rightarrow x^3 < 0,\ x+1 > 0,\ x-2 < 0 & \Rightarrow f(x) > 0 \\
x < -1 & \Rightarrow x^3 < 0,\ x+1 < 0,\ x-2 < 0 & \Rightarrow f(x) < 0
\end{array}$$

Dit geeft voor de limieten:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\downarrow 2} f(x) = \infty & (f(x) > 0 \text{ als } x \downarrow 2) \\ \lim_{x\uparrow 2} f(x) = -\infty & (f(x) < 0 \text{ als } x \uparrow 2) \\ \lim_{x\downarrow -1} f(x) = \infty & (f(x) > 0 \text{ als } x \downarrow -1) \\ \lim_{x\uparrow -1} f(x) = -\infty & (f(x) < 0 \text{ als } x \uparrow -1) \end{array}$$

Opgave 4. De functie f is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x > 0); \\ 89,93 & (x = 0); \\ x^3 & (x < 0). \end{cases}$$

Ga na of $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat. Zo ja bereken hem, zo nee, leg uit waarom niet.

Oplossing. Er geldt $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$

(als x van rechts naar 0 nadert, dan is $f(x) = \sqrt{x}$ en nadert $f(x)$ naar 0).

Er geldt $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = 0$

(als x van links naar 0 nadert, dan is $f(x) = x^3$ en nadert $f(x)$ naar 0).

Dus $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat en is gelijk aan 0.

BELANGRIJKE OPMERKING:
bij de berekening van de limiet $\lim_{x\to a} f(x)$ kijken we wat er met $f(x)$ gebeurt wanneer we x naar a laten naderen, maar niet gelijk wordt aan a. Dus de waarde van de limiet hangt *niet* af van $f(a)$, maar alleen af van $f(x)$ voor alle x die dichtbij a liggen, maar niet gelijk zijn aan a.
Dus in de opgave hadden we voor $f(0)$ in plaats van 89,93 net zo goed een ander getal kunnen nemen, dat had voor de waarde van $\lim_{x\to 0} f(x)$ niet uitgemaakt.

Opgave 5. De functie f is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0); \\ 1 & (x = 0); \\ x + 1 & (0 < x < 1); \\ 3 & (x = 1); \\ 2x^2 & (x > 1).. \end{cases}$$

Ga na of f links-continu, rechts-continu of continu is in $x = 0$ en $x = 1$. Als er in $x = 0$ of $x = 1$ een discontinuïteit is, ga na of die opheffbaar is.

Oplossing. We gebruiken het volgende. f heeft een ophefbare discontinuïteit in $x = a$ als $\lim_{x \to a} f(x) = L$ bestaat en als $f(a) \neq L$. Dan kunnen we f continu maken in $x = a$ door te definiëren $f(a) := L$. Dus als $\lim_{x \to a} f(x)$ niet bestaat, dan heeft f zeker geen ophefbare discontinuïteit in $x = a$.

• Er geldt $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} 2x = 0 \neq f(0)$. Dus f is niet links-continu in $x = 0$.

• Verder geldt $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} x + 1 = 1 = f(0)$. Dus f is wel rechts-continu in $x = 0$.

• f is niet links-continu in $x = 0$ dus ook niet continu in $x = 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet omdat de linker- en rechterlimiet verschillend zijn. Dus f heeft in $x = 0$ geen ophefbare discontinuïteit.

• Er geldt $f(1) = 3$ en $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1} x + 1 = 2 \neq f(1)$. Dus f is niet links-continu in $x = 1$.

• Verder geldt $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} 2x^2 = 2 \neq f(1)$. Dus f is ook niet rechts-continu in $x = 1$.

• f is niet links-continu en niet rechts-continu in $x = 1$ dus ook niet continu in $x = 1$.

• Er geldt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ (linker- en rechterlimiet zijn beide 2). We kunnen nu f continu maken in $x = 1$ door te definiëren $f(1) := 2$. Dus f heeft in $x = 1$ een ophefbare discontinuïteit.

Opgave 6. De functie f is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} k \sin(x + 7\pi/6) & (x < 0); \\ k^2 & (x = 0); \\ f(x) = 2^{-kx-2} & (x > 0). \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van k waarvoor f links-continu is in $x = 0$, de waarden van k waarvoor f rechts-continu is in $x = 0$, en de waarden van k waarvoor f continu is in $x = 0$.

Oplossing. Er geldt

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} k \sin(x + 7\pi/6) = k \sin(7\pi/6) = -\frac{1}{2}k.$$

Volgens de definities is

f rechts-continu in $x = 0 \iff \lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = f(0) \iff k^2 = \frac{1}{4} \iff k = \frac{1}{2}$ of $k = -\frac{1}{2}$,

f links-continu in $x = 0 \iff \lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = f(0) \iff -\frac{1}{2}k = k^2 \iff k^2 + \frac{1}{2}k = 0$

$\iff k = 0$ of $k = -\frac{1}{2}$,

f continu in $x = 0 \iff f$ links-continu en rechts-continu in $x = 0 \iff k = -\frac{1}{2}$.

Opgave 7. Gegeven is de functie $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

a) Leg uit dat deze functie hoogstens één nulpunt heeft.

b) Laat zien dat f een nulpunt heeft in $[0, 1]$.
c) Ligt dit nulpunt in $[0, \frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2}, 1]$?
d) Bepaal een interval van lengte $\frac{1}{16}$ dat het nulpunt van f bevat.

Oplossing. a) De functie f is stijgend omdat x^3 en x beide stijgend zijn in x. Dus f heeft hoogstens één nulpunt.

b) We passen de tussenwaardestelling toe: als f continu is, $f(a) \leq 0$ en $f(b) \geq 0$ of andersom, dan is er minstens één $c \in [a, b]$ met $f(c) = 0$.
Er geldt dat f continu is en $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$, dus f heeft een nulpunt in $[0, 1]$.

c) Er geldt $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} > 0$. Dus f heeft een nulpunt in $[0, \frac{1}{2}]$.

d) Er geldt $f(\frac{1}{4}) = -\frac{31}{64} < 0$. Dus f heeft een nulpunt in $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
Neem het midden van $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, dat is $\frac{3}{8}$. Er geldt $f(\frac{3}{8}) = -\frac{101}{512} < 0$. Dus f heeft een nulpunt in $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$.
Neem het midden van $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$, dat is $\frac{7}{16}$. Er geldt $f(\frac{7}{16}) = -\frac{169}{4096} < 0$. Dus f heeft een nulpunt in $[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}]$.