OEFENOPGAVEN CONTINUE WISKUNDE

De antwoorden staan op de volgende bladzijden

Opgave 1. Een rechthoek heeft breedte x en hoogte y. De oppervlakte van deze rechthoek is $xy = 1$. Bepaal x en y zodat de diameter $\sqrt{x^2 + y^2}$ van deze rechthoek minimaal is.
Hint. Stel $u := x^2$. Schrijf het kwadraat van de diameter als functie van u en bepaal voor welke u deze functie een absoluut minimum aanneemt.

Opgave 2. Bepaal de scheve asymptoot voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ van $f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3}{x^3 + 1}$.

Opgave 3. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^5}$.
Je moet hiervoor het volgende bepalen:
a) het domein van f;
b) de verticale asymptoten van f en voor elke verticale asymptoot $x = a$ van f de limieten $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$; hiervoor is een tekenoverzicht van f nodig;
c) eventuele horizontale of scheve asymptoten van f voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$;
d) de afgeleide van f', een tekenoverzicht van f', en de extremen van f met plaats, grootte en aard (vergeet niet dat je van negatieve getallen een vijfdemachtswortel kan trekken).

Opgave 4. Bereken de volgende limieten:
a) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$;
b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - {}^2\log x}{x - 4}$;
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ (hier zijn a en b reële getallen $\neq 0$);
d) $\lim\limits_{x \downarrow 0} (1 + x^2)^{1/x}$;
e) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$.

Opgave 5. Bepaal het 2^{e} Taylorpolynoom $p_{3,0}(x)$ van $\sin(2x + x^2)$ rond $x = 0$.

Opgave 6. a) Bepaal het 3^{e} Taylorpolynoom $p_{3,81}(x)$ van $\sqrt[4]{x}$ rond $x = 81$.
b) Bepaal de restterm $R_{4,81}(x)$.
c) Laat met behulp van de restterm uit b) zien dat $|\sqrt[4]{82} - p_{3,81}(82)| < 3^{-15}$.

ANTWOORDEN

Opgave 1: $x = y = 1$.

Opgave 2: $y = 2x + 1$ zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

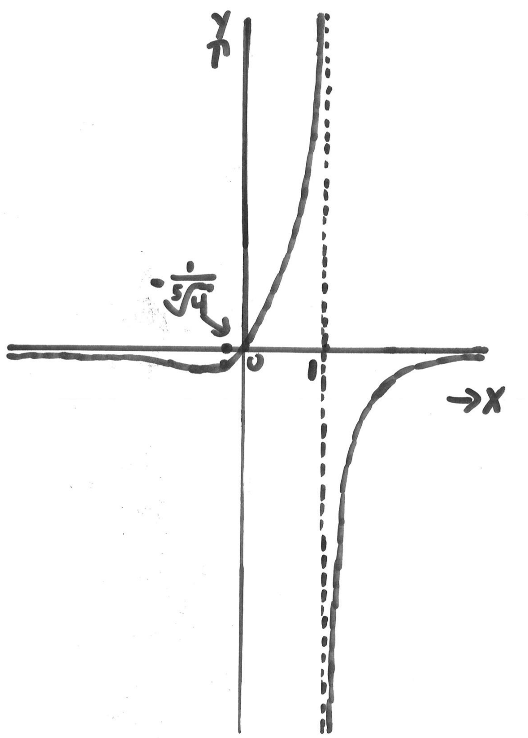
Opgave 3:

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

b) scheve asymptoot $x = 1$; $f(x) < 0$ voor $x > 1$; $f(x) > 0$ voor $0 < x < 1$, $f(x) < 0$ voor $x < 0$; $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$.

c) horizontale asymptoot $y = 0$ zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$;

d) $f'(x) = \dfrac{4x^5 + 1}{(1 - x^5)^2}$, $f'(x) > 0$ voor $x > \sqrt[5]{-1/4} = -1/\sqrt[5]{4}$ en $x \neq 1$, $f'(x) < 0$ voor $x < -1/\sqrt[5]{4}$, f is stijgend voor $x > -1/\sqrt[5]{4}$, $x \neq 1$, f is dalend voor $x < -1/\sqrt[5]{4}$, f heeft een relatief minimum voor $x = -1/\sqrt[5]{4}$ van grootte $f(x) = -4/5\sqrt[5]{4}$;



Opgave 4: a) $\dfrac{1}{e}$, $b) -\dfrac{1}{4\ln 2}$, $c)\dfrac{a^2}{b^2}$, $d) 1$, $e)\dfrac{1}{2}$.

Opgave 5: $p_{2,0}(x) = 2x + x^2$

Opgaven 6a en 6b:

a) $p_{3,81}(x) = 3 + \frac{1}{108} \cdot (x-81) - \frac{1}{209952} \cdot (x-81)^2 + \frac{7}{22674816} \cdot (x-81)^3$

b) $R_{4,81}(x) = -\frac{77}{4096}\xi^{-15/4} \cdot (x-81)^4$, waarbij ξ ligt tussen 81 en x.