CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

1e college: Polynomen en rationale functies

Jan-Hendrik Evertse

Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Rekenen met polynomen en rationale functies

Polynomen

Een **polynoom** (in één variabele) is een uitdrukking met machten van x: $1, x, x^2, \ldots$.

Voorbeeld: $3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Polynomen

Een **polynoom** (in één variabele) is een uitdrukking met machten van x: $1, x, x^2, \ldots$.

Voorbeeld: $3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x + 1$.

We noemen de exponent op de hoogste macht van x die in het polynoom voorkomt de **graad** van het polynoom.
In het voorbeeld is de hoogste macht x^5 dus de graad is 5.

We noemen de coëfficiënt van de hoogste macht van x de **kopcoëfficiënt.**
Dus in het voorbeeld is de kopcoëfficiënt gelijk aan 3 (nl. coëff. van x^5).

Polynomen

Een **polynoom** (in één variabele) is een uitdrukking met machten van x: $1, x, x^2, \ldots$.

Voorbeeld: $3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x + 1$.

We noemen de exponent op de hoogste macht van x die in het polynoom voorkomt de **graad** van het polynoom.
In het voorbeeld is de hoogste macht x^5 dus de graad is 5.

We noemen de coëfficiënt van de hoogste macht van x de **kopcoëfficiënt.**
Dus in het voorbeeld is de kopcoëfficiënt gelijk aan 3 (nl. coëff. van x^5).

Termen met coëfficiënt 0 schrijven we niet op.

Voorbeeld. $x^4 + 2x^2$ staat voor $x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x + 0$.

Rationale functies

Een **rationale functie** is een quotiënt van twee polynomen.

Voorbeeld. $\dfrac{-2x^6 + x^5 - 3}{3x^8 - 9}$.

Rationale functies

Een **rationale functie** is een quotiënt van twee polynomen.

Voorbeeld. $\dfrac{-2x^6 + x^5 - 3}{3x^8 - 9}$.

Je kan polynomen vergelijken met gehele getallen en rationale functies met breuken.

Je kan met rationale functies net zo rekenen als met breuken.

Rekenen met rationale functies

Vermenigvuldigen:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}$$ vermenigvuldig de tellers en de noemers

Rekenen met rationale functies

Vermenigvuldigen:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40} \quad \text{vermenigvuldig de tellers en de noemers}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x^2+1} \cdot \frac{x^3+2}{x+1} &= \frac{(2x+1)(x^3+2)}{(x^2+1)(x+1)} \\
&= \frac{2x \cdot x^3 + 2x \cdot 2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot 2}{x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1} \\
&= \frac{2x^4 + x^3 + 4x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}.
\end{aligned}$$

Rekenen met rationale functies

Delen:

$$\frac{-3/8}{11/13} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{13}{11} = \frac{(-3) \cdot 13}{8 \cdot 11} = -\frac{39}{88}.$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

Rekenen met rationale functies

Delen:

$$\frac{-3/8}{11/13} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{13}{11} = \frac{(-3)\cdot 13}{8 \cdot 11} = -\frac{39}{88}.$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

$$\begin{aligned} \frac{(x^3-x)/(2x-3)}{(5x^{11}+x^{10})/(x^3+2x^2-100)} &= \frac{x^3-x}{2x-3} \cdot \frac{x^3+2x^2-100}{5x^{11}+x^{10}} \\ &= \frac{(x^3-x)(x^3+2x^2-100)}{(2x-3)(5x^{11}+x^{10})}. \end{aligned}$$

Rekenen met rationale functies

Optellen:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 9}{7\cdot 9}+\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{3\cdot 9+2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{41}{63}.$$

Een breuk blijft gelijk als je de teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.
Maak eerst de noemers gelijk en tel dan de tellers op.

Optellen:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 9}{7\cdot 9}+\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{3\cdot 9+2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{41}{63}.$$

Een breuk blijft gelijk als je de teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.
Maak eerst de noemers gelijk en tel dan de tellers op.

Opmerking: $\frac{3}{7}+\frac{2}{9}\neq\frac{3+2}{7+9}$.

Rekenen met rationale functies

Optellen:

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 9}{7\cdot 9}+\frac{2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{3\cdot 9+2\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{41}{63}.$$

Een breuk blijft gelijk als je de teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.
Maak eerst de noemers gelijk en tel dan de tellers op.

$$\begin{aligned}\frac{3x-5}{2x+8}+\frac{x-3}{x} &= \frac{(3x-5)x}{(2x+8)x}+\frac{(x-3)(2x+8)}{x(2x+8)}\\ &= \frac{(3x-5)x+(x-3)(2x+8)}{x(2x+8)}\end{aligned}$$

Korte herhaling

- Een rationale functie is het quotiënt van twee polynomen.
- Het rekenen met rationale functies gaat precies zo als het rekenen met breuken.
- Een rationale functie blijft gelijk als je teller en noemer met hetzelfde polynoom vermenigvuldigt.
- Vermenigvuldigen van rationale functies: tellers met elkaar vermenigvuldigen, noemers met elkaar vermenigvuldigen.
- Delen door rationale functie: vermenigvuldigen met het omgekeerde.
- Optellen van twee rationale functies: maak eerst de noemers gelijk door het product van de noemers te nemen; tel daarna de tellers op.

Deel 2: Staartdelingen van polynomen

Delers en veelvouden

Voor gehele getallen p en q geldt dat q een deler is van p als $\frac{p}{q}$ een geheel getal is. We noemen p dan een veelvoud van q.

Voorbeeld. 37 is een deler van 777 en 777 een veelvoud van 37, want $\frac{777}{37} = 21$.

Delers en veelvouden

Voor gehele getallen p en q geldt dat q een deler is van p als $\frac{p}{q}$ een geheel getal is. We noemen p dan een veelvoud van q.

Voorbeeld. 37 is een deler van 777 en 777 een veelvoud van 37, want $\frac{777}{37} = 21$.

Iets dergelijks geldt voor polynomen. Voor polynomen $p(x)$ en $q(x)$ geldt dat $q(x)$ een deler is van $p(x)$ en $p(x)$ een veelvoud van $q(x)$ als $\frac{p(x)}{q(x)}$ een polynoom is.

Voorbeeld. $x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1)$, dus $\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$. Hieruit volgt dat $x + 1$ een deler is van $x^3 + 1$ en $x^3 + 1$ een veelvoud van $x + 1$.

Staartdelingen van getallen

Neem aan dat we een positief geheel getal p willen delen door een positief geheel getal q. We trekken een zo groot mogelijk veelvoud van q af van p. In het algemeen blijft er dan een rest over die kleiner is dan q.

Als de rest 0 is dan gaat de deling op en is q een deler van p.

Staartdelingen van getallen

Neem aan dat we een positief geheel getal p willen delen door een positief geheel getal q. We trekken een zo groot mogelijk veelvoud van q af van p. In het algemeen blijft er dan een rest over die kleiner is dan q.

Als de rest 0 is dan gaat de deling op en is q een deler van p.

Voorbeeld. We willen 771 door 23 delen.

$$
\begin{array}{rl}
23\,/ & 771 \qquad\qquad \backslash\; 33 \;\leftarrow \text{quotiënt} \\
 & 69\cdot \;\; - \\
\hline
 & \;\,81 \\
 & \;\,69 \; - \\
\hline
 & \;\,12 \;\; \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

We hebben eerst 30×23 afgetrokken en daarna 3×23, dus in totaal 33×23. Dan blijft er een rest 12 over, en daar kunnen we geen 23 meer van aftrekken.

Dus $771 = 33 \times 23 + 12$. Dus 33 is het quotiënt en 12 de rest.

Staartdelingen voor polynomen

Gegeven zijn twee polynomen $p(x)$ en $q(x)$. We willen van $p(x)$ een veelvoud van $q(x)$ aftrekken en een rest overhouden die 'kleiner is dan' $q(x)$, dat wil zeggen de graad van de rest is kleiner dan de graad van $q(x)$.

Als de rest 0 is dan gaat de deling op en is $q(x)$ een deler van $p(x)$.

Staartdelingen voor polynomen

Gegeven zijn twee polynomen $p(x)$ en $q(x)$. We willen van $p(x)$ een veelvoud van $q(x)$ aftrekken en een rest overhouden die 'kleiner is dan' $q(x)$, dat wil zeggen de graad van de rest is kleiner dan de graad van $q(x)$.

Als de rest 0 is dan gaat de deling op en is $q(x)$ een deler van $p(x)$.

Voorbeeld. Neem $p(x) = x^5 + 2x^2 + 1$, $q(x) = x^2 + 2$. Als we $(x^3 - 2x + 2)(x^2 + 2)$ aftrekken van $x^5 + 2x^2 + 1$ blijft $4x - 3$ over, met andere woorden,

$$\begin{array}{ccccccccc} p(x) & = & \text{quotiënt} & \cdot & q(x) & + & \text{rest} \\ x^5 + 2x^2 + 1 & = & (x^3 - 2x + 2) & \cdot & (x^2 + 2) & + & 4x - 3 \end{array}$$

De graad van $4x - 3$ $(= 1)$ is kleiner dan de graad van het polynoom $q(x) = x^2 + 2$ waardoor we delen $(= 2)$.

Het quotiënt en de rest kunnen worden bepaald met een staartdeling.

Staartdelingen voor polynomen

Idee van een staartdeling.

Gegeven zijn twee polynomen $p(x)$ en $q(x)$. in iedere stap trekken we een veelvoud van $q(x)$ af zodat de term met de hoogste macht van x verdwijnt. Uiteindelijk blijft er een rest over waarvan de graad kleiner is dan die van $q(x)$.

Het kan zijn dat de rest 0 is. Dan gaat de deling op en is $q(x)$ een deler van $p(x)$.

Staartdelingen voor polynomen

$$
\begin{array}{llll}
x^2+2\,/ & x^5+2x^2+1 & \backslash\ x^3 & \\
 & x^5+2x^3 \quad - & & x^3(x^2+2) \text{ aftrekken} \\
 & \overline{} & & \text{om } x^5 \text{ kwijt te raken} \\
 & -2x^3+2x^2+1 & &
\end{array}
$$

Staartdelingen voor polynomen

$$
\begin{array}{lll}
x^2+2\,/ & x^5+2x^2+1 & \backslash\; x^3-2x \\
 & x^5+2x^3 \quad - & \\
\hline
 & -2x^3+2x^2+1 & \\
 & -2x^3-4x \quad - & \\
\hline
 & 2x^2+4x+1 &
\end{array}
$$

$x^3(x^2+2)$ aftrekken
om x^5 kwijt te raken

$-2x(x^2+2)$ aftrekken
om $-2x^3$ kwijt te raken

Staartdelingen voor polynomen

$$
\begin{array}{lll}
x^2+2\,/ & x^5+2x^2+1 & \backslash\; x^3-2x+2 \\
 & x^5+2x^3 \quad - & \\
 & \overline{-2x^3+2x^2+1} & \\
 & -2x^3-4x \quad - & \\
 & \overline{2x^2+4x+1} & \\
 & 2x^2+4 \quad - & \\
\text{rest} \rightarrow & \overline{4x-3} &
\end{array}
$$

$x^3(x^2+2)$ aftrekken om x^5 kwijt te raken

$-2x(x^2+2)$ aftrekken om $-2x^3$ kwijt te raken

$2(x^2+2)$ aftrekken om $2x^2$ kwijt te raken

Staartdelingen voor polynomen

$$
\begin{array}{llll}
x^2+2\,/ & x^5+2x^2+1 & \backslash\ x^3-2x+2 & \\
 & x^5+2x^3 \quad - & & x^3(x^2+2) \text{ aftrekken} \\
 & \overline{} & & \text{om } x^5 \text{ kwijt te raken} \\
 & -2x^3+2x^2+1 & & \\
 & -2x^3-4x \quad - & & -2x(x^2+2) \text{ aftrekken} \\
 & \overline{} & & \text{om } -2x^3 \text{ kwijt te raken} \\
 & 2x^2+4x+1 & & \\
 & 2x^2+4 \quad - & & 2(x^2+2) \text{ aftrekken} \\
 & \overline{} & & \text{om } 2x^2 \text{ kwijt te raken} \\
\text{rest} \rightarrow & 4x-3 & &
\end{array}
$$

We hebben $x^3(x^2+2)+(-2x)(x^2+2)+2(x^2+2)=(x^3-2x+2)(x^2+2)$ van x^5+2x^2+1 afgetrokken en houden $4x-3$ over.

Dus $x^5+2x^2+1=(x^3-2x+2)(x^2+2)+4x-3$.

Staartdelingen van polynomen

Algemeen: Veronderstel dat we een polynoom $p(x)$ willen delen door een polynoom $q(x)$.
Voer een staartdeling uit:

$$
\begin{array}{lll}
q(x)/ & p(x) & \backslash \text{ quotiënt} \\
 & \dots & \\
 & \overline{} & \\
 & \text{rest} &
\end{array}
$$

Dan is $p(x) = (\text{quotiënt})q(x) + (\text{rest})$, waarbij de graad van de rest kleiner is dan de graad van $q(x)$.

Nog een voorbeeld

Deel $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ door $x - 5$ en bepaal de rest.

Nog een voorbeeld

Deel $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ door $x - 5$ en bepaal de rest.

$$
\begin{array}{lll}
x - 5 \,/ & x^3 - 4x^2 - 4x - 5 & \backslash\; x^2 \\
& x^3 - 5x^2 \quad - & \\
\hline
& x^2 - 4x - 5 &
\end{array}
$$

$x^2(x-5)$ aftrekken

Nog een voorbeeld

Deel $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ door $x - 5$ en bepaal de rest.

$$
\begin{array}{lll}
x - 5 \,/ & x^3 - 4x^2 - 4x - 5 \quad \backslash\; x^2 + x & \\
 & x^3 - 5x^2 \quad - & x^2(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x^2 - 4x - 5 & \\
 & x^2 - 5x \quad - & x(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x - 5 &
\end{array}
$$

Nog een voorbeeld

Deel $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ door $x - 5$ en bepaal de rest.

$$
\begin{array}{llll}
x - 5 \,/ & x^3 - 4x^2 - 4x - 5 & \backslash \; x^2 + x + 1 & \\
 & x^3 - 5x^2 \quad - & & x^2(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x^2 - 4x - 5 & & \\
 & x^2 - 5x \quad - & & x(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x - 5 & & \\
 & x - 5 \quad - & & 1 \cdot (x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

Nog een voorbeeld

Deel $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ door $x - 5$ en bepaal de rest.

$$\begin{array}{lll}
x-5\,/ & x^3-4x^2-4x-5 \quad \backslash\; x^2+x+1 & \\
 & x^3-5x^2 \quad - & x^2(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x^2-4x-5 & \\
 & x^2-5x \quad - & x(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & x-5 & \\
 & x-5 \quad - & 1\cdot(x-5) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Dus $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x + 1)(x - 5)$.
De rest is 0, $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ is deelbaar door $x - 5$.

Omwerken van breuken

We kunnen elke breuk schrijven als $\left(\text{geheel getal} + \dfrac{\text{teller}}{\text{noemer}}\right)$ waarbij de teller kleiner is dan de noemer.

Voorbeeld. $\dfrac{771}{23} = 33\dfrac{12}{23}$.

Namelijk $771 = 33 \times 23 + 12$. Delen door 23 geeft het bovenstaande.

Voor rationale functies geldt iets soortgelijks.

Omwerken van rationale functies

We kunnen elke rationale functie $p(x)/q(x)$ schrijven als $\left(\text{polynoom} + \dfrac{\text{teller}}{\text{noemer}}\right)$ waarbij de teller en noemer polynomen zijn met de graad van de teller kleiner dan de graad van de noemer.

Deel $p(x)$ door $q(x)$ met een staartdeling:

$$\begin{array}{lll} q(x)/ & p(x) & \backslash\ \text{quotiënt} \\ & \dots & \\ & \overline{} & \\ & \text{rest} & \end{array} \qquad p(x) = (\text{quotiënt})q(x) + (\text{rest}).$$

Deel door $q(x)$. Dan volgt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(\text{quotiënt})q(x)}{q(x)} + \frac{\text{rest}}{q(x)} = (\text{quotiënt}) + \frac{\text{rest}}{q(x)}.$$

Omwerken van rationale functies

Voorbeeld.

$$\begin{array}{lll} x^2+2/ & x^5-2x^2+1 & \backslash\, x^3-3x+2 \\ & \dots & \\ \hline & 4x-3 & \end{array},$$

$x^5+2x^2+1=(x^3-3x+2)(x^2+2)+4x-3.$

Omwerken van rationale functies

Voorbeeld.
$$\begin{array}{lll} x^2+2/ & x^5-2x^2+1 & \backslash\; x^3-3x+2 \\ & \cdots & \\ \cline{2-2} & 4x-3 & \end{array},$$

$x^5+2x^2+1=(x^3-3x+2)(x^2+2)+4x-3.$

Als we door x^2+2 delen krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{x^5+2x^2+1}{x^2+2} &= \frac{(x^3-3x+2)(x^2+2)}{x^2+2}+\frac{4x-3}{x^2+2} \\ &= x^3-3x+2+\frac{4x-3}{x^2+2}. \end{aligned}$$

Praktisch nut: x^3-3x+2 is een goede benadering van $\dfrac{x^5+2x^2+1}{x^2+2}$ maar makkelijker te berekenen.

Deel 3: Nulpunten van polynomen

Nulpunten van polynomen

Polynomen van graad 1:

$ax + b$ heeft precies één nulpunt, namelijk $x = -\dfrac{b}{a}$.

Nulpunten van polynomen

Polynomen van graad 1:

$ax + b$ heeft precies één nulpunt, namelijk $x = -\frac{b}{a}$.

Polynomen van graad 2:
$ax^2 + bx + c$ heeft hoogstens twee nulpunten:

bepaal de discriminant $D = b^2 - 4ac$;
als $D > 0$ dan zijn er twee nulpunten
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
als $D = 0$ dan is er maar één nulpunt, namelijk $x = -\frac{b}{2a}$;
als $D < 0$ dan zijn er geen nulpunten
(dat wil zeggen, niet in de verzameling van reële getallen. In Continue wiskunde 2 breiden we de verzameling van reële getallen uit tot de verzameling van complexe getallen waarin er wel twee nulpunten liggen).

Nulpunten van polynomen

Polynomen van graad 1:

$ax + b$ heeft precies één nulpunt, namelijk $x = -\dfrac{b}{a}$.

Polynomen van graad 2:
$ax^2 + bx + c$ heeft hoogstens twee nulpunten:

bepaal de discriminant $D = b^2 - 4ac$;
als $D > 0$ dan zijn er twee nulpunten
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
als $D = 0$ dan is er maar één nulpunt, namelijk $x = -\dfrac{b}{2a}$;
als $D < 0$ dan zijn er geen nulpunten
(dat wil zeggen, niet in de verzameling van reële getallen. In Continue wiskunde 2 breiden we de verzameling van reële getallen uit tot de verzameling van complexe getallen waarin er wel twee nulpunten liggen).

Polynomen van hogere graad: Het is in het algemeen erg moeilijk om nulpunten te bepalen van polynomen van graad ≥ 3.
We geven een methode die soms werkt.

Nulpunten van polynomen

We noemen enkele feiten waarmee soms nulpunten van polynomen van hogere graad kunnen worden bepaald.

Nulpunten van polynomen

We noemen enkele feiten waarmee soms nulpunten van polynomen van hogere graad kunnen worden bepaald.

Feit 1. Als $p(x)$ een polynoom is met geheeltallige coëfficienten (dat wil zeggen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) en $x = a$ is een geheeltallig nulpunt van $p(x)$, dan is a een positieve of negatieve deler van de laatste term van $p(x)$.

Nulpunten van polynomen

We noemen enkele feiten waarmee soms nulpunten van polynomen van hogere graad kunnen worden bepaald.

Feit 1. Als $p(x)$ een polynoom is met geheeltallige coëfficienten (dat wil zeggen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) en $x = a$ is een geheeltallig nulpunt van $p(x)$, dan is a een positieve of negatieve deler van de laatste term van $p(x)$.

Voorbeeld. We kijken of $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ (al gezien) een geheeltallig nulpunt heeft.
De laatste term van $p(x)$ is -5. De positieve en negatieve delers van -5 zijn ± 1, ± 5. We proberen of dit nulpunten zijn.

Er geldt: $p(1) = -12$, $p(-1) = -10$, $p(5) = 0$. Dus $x = 5$ is een nulpunt van $p(x)$.

De getallen ± 2, ± 3, ± 4 zijn zeker geen nulpunten van $p(x)$ omdat dit geen delers zijn van -5. Dus deze hoeven we niet te proberen.

We kunnen natuurlijk de pech hebben dat geen van de delers van de constante term van $p(x)$ een nulpunt geeft. Dan heeft $p(x)$ geen geheeltallige nulpunten.

Nulpunten van polynomen

Feit 2. Als $p(x)$ een nulpunt $x = a$ heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = q(x)(x - a)$ voor zeker polynoom $q(x)$.

Het polynoom $q(x)$ kun je vinden door een staartdeling; de rest van de deling moet 0 zijn.

Nulpunten van polynomen

Feit 2. Als $p(x)$ een nulpunt $x = a$ heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = q(x)(x - a)$ voor zeker polynoom $q(x)$.

Het polynoom $q(x)$ kun je vinden door een staartdeling; de rest van de deling moet 0 zijn.

Voorbeeld. We hebben gezien dat $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ nulpunt $x = 5$ heeft. Dus $p(x)$ is deelbaar door $x - 5$. We hebben eerder al uitgerekend dat $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x + 1)(x - 5)$.

Er geldt $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x - 5 = 0$ of $x^2 + x + 1 = 0 \iff$ $x = 5$ of nulpunt van $x^2 + x + 1$.

Nulpunten van polynomen

Feit 2. Als $p(x)$ een nulpunt $x = a$ heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = q(x)(x - a)$ voor zeker polynoom $q(x)$.

Het polynoom $q(x)$ kun je vinden door een staartdeling; de rest van de deling moet 0 zijn.

Voorbeeld. We hebben gezien dat $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ nulpunt $x = 5$ heeft. Dus $p(x)$ is deelbaar door $x - 5$. We hebben eerder al uitgerekend dat $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = (x^2 + x + 1)(x - 5)$.

Er geldt $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x - 5 = 0$ of $x^2 + x + 1 = 0 \iff$ $x = 5$ of nulpunt van $x^2 + x + 1$.

$x^2 + x + 1$ heeft geen nulpunten want de discriminant is $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

Dus $x = 5$ is het enige nulpunt van $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$.

Nogmaals de feiten

Feit 1: als $p(x)$ een polynoom is met geheeltallige coëfficienten (dat wil zeggen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) en $x = a$ is een geheeltallig nulpunt van $p(x)$, dan is a een positieve of negatieve deler van de laatste term van $p(x)$.

Feit 2: Als $p(x)$ een nulpunt $x = a$ heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = q(x)(x - a)$ voor zeker polynoom $q(x)$.

Het polynoom $q(x)$ kun je vinden door een staartdeling; de rest van de deling moet 0 zijn.

Nogmaals de feiten

Feit 1: als $p(x)$ een polynoom is met geheeltallige coëfficienten (dat wil zeggen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) en $x = a$ is een geheeltallig nulpunt van $p(x)$, dan is a een positieve of negatieve deler van de laatste term van $p(x)$.

Feit 2: Als $p(x)$ een nulpunt $x = a$ heeft dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$, dat wil zeggen $p(x) = q(x)(x - a)$ voor zeker polynoom $q(x)$.

Het polynoom $q(x)$ kun je vinden door een staartdeling; de rest van de deling moet 0 zijn.

Bepalen van de nulpunten van $p(x)$:
Stap 1. Bepaal een nulpunt van $p(x)$. Gebruik bijvoorbeeld Feit 1.

Stap 2. Veronderstel dat we in Stap 1 een nulpunt $x = a$ hebben gevonden. Bepaal $q(x)$ zodat $p(x) = q(x)(x - a)$ met een staartdeling.

Stap 3. Er geldt $p(x) = 0 \iff x = a$ of $q(x) = 0$.
Dus de nulpunten van $p(x)$ zijn $x = a$ en de nulpunten van $q(x)$.

Bepaal de nulpunten van $q(x)$, bijvoorbeeld met Feit 1 als $q(x)$ graad ≥ 3 heeft of de abc-formule als $q(x)$ graad 2 heeft.

Nog een voorbeeld

We bepalen de nulpunten van $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14$.

Nog een voorbeeld

We bepalen de nulpunten van $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14$.

Stap 1. Zoek een nulpunt.

We hopen dat $p(x)$ een geheeltallig nulpunt heeft. Zo ja, dan is dat een positieve of negatieve deler van -14, dus ± 1, ± 2, ± 7, ± 14.

Een berekening geeft $p(1) = -24$, $p(-1) = 6$, $p(2) = -18$, $p(-2) = 30$, $p(7) = 462$, $p(-7) = 0$.
Dus $x = -7$ is een nulpunt van $p(x)$.

Nog een voorbeeld

We bepalen de nulpunten van $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14$.

Stap 2. $x = -7$ is een nulpunt van $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14$. Deel $p(x)$ door $x - (-7) = x + 7$.

$$
\begin{array}{lll}
x + 7 \,/ & x^3 + 5x^2 - 16x - 14 \quad \backslash \; x^2 - 2x - 2 & \\
 & x^3 + 7x^2 \quad - & x^2(x+7) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & -2x^2 - 16x - 14 & \\
 & -2x^2 - 14x \quad - & -2x(x+7) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & -2x - 14 & \\
 & -2x - 14 \quad - & -2 \cdot (x+7) \text{ aftrekken} \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Dus $x^3 + 5x^2 - 16x - 14 = (x^2 - 2x - 2)(x + 7)$.

Nog een voorbeeld

We bepalen de nulpunten van $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14$.

Stap 3. Conclusie.

We hebben gezien dat $p(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 14 = (x^2 - 2x - 2)(x + 7)$.

Er geldt: $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$ of $x = -7$.

Het polynoom $x^2 - 2x - 2$ heeft discriminant $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$ en nulpunten $\dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$
(namelijk $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$).

Dus de nulpunten van $p(x)$ zijn $-7, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$.

Einde van het college