CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

10e college: De regel van L'Hôpital

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: $0/0$-limieten en ∞/∞-limieten

De regel van L'Hôpital voor $0/0$-limieten

Laat f, g differentieerbare functies zijn met

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Neem aan dat $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat en eindig is. Dan is

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hier mag a ook ∞ of $-\infty$ zijn. De regel geldt ook voor linker- en rechterlimieten.

De regel van L'Hôpital voor ∞/∞-limieten

Laat f, g differentieerbare functies zijn met

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

Neem aan dat $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat en eindig is. Dan is

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hier mag a ook ∞ of $-\infty$ zijn. De regel geldt ook voor linker- en rechterlimieten.

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Met $\overset{0/0}{=}$ geven we aan dat het een $0/0$-limiet betreft.
Dit moet je bij een uitwerking altijd aangeven.

Eenvoudige maar belangrijke 0/0-limieten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

namelijk $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Met $\overset{0/0}{=}$ geven we aan dat het een 0/0-limiet betreft.
Dit moet je bij een uitwerking altijd aangeven.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Met $\overset{0/0}{=}$ geven we aan dat het een $0/0$-limiet betreft.
Dit moet je bij een uitwerking altijd aangeven.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Met $\overset{0/0}{=}$ geven we aan dat het een $0/0$-limiet betreft.
Dit moet je bij een uitwerking altijd aangeven.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Met $\overset{0/0}{=}$ geven we aan dat het een $0/0$-limiet betreft.
Dit moet je bij een uitwerking altijd aangeven.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

namelijk $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$

Eenvoudige maar belangrijke $0/0$-limieten

Opmerking. Bij een precieze opbouw van de wiskundige theorie worden de limieten

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

bewezen op een andere manier dan met de regel van L'Hôpital, zonder gebruik te maken van afgeleiden.

De reden hiervoor is dat deze limieten nodig zijn om te bewijzen dat $\sin' x=\cos x$, $(e^x)'=e^x$ en $\ln' x=\frac{1}{x}$.

Wat wij doen is dus eigenlijk krom: we berekenen de limieten door de afgeleiden van $\sin x$, e^x en $\ln x$ te gebruiken, terwijl we eigenlijk die limieten nodig hebben om de afgeleiden te vinden.

Maar als je de regel van L'Hôpital kent en alle afgeleiden kent kun je die limieten makkelijk terugvinden.

Gebruik L'Hôpital alleen als het nodig is!

De regel van L'Hôpital geldt alleen voor $0/0$-limieten of voor ∞/∞-limieten, niet voor limieten die je op een 'gewone' manier uit kan rekenen.

Gebruik L'Hôpital alleen als het nodig is!

De regel van L'Hôpital geldt alleen voor 0/0-limieten of voor ∞/∞-limieten, niet voor limieten die je op een 'gewone' manier uit kan rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+6}{x+3}$.

Met deze limiet is niets bijzonders aan de hand, voor $x = 3$ is de noemer $\neq 0$, de functie $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x+3}$ is continu in $x = 3$ en dus

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{3^2+6}{3+3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Gebruik L'Hôpital alleen als het nodig is!

De regel van L'Hôpital geldt alleen voor $0/0$-limieten of voor ∞/∞-limieten, niet voor limieten die je op een 'gewone' manier uit kan rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+6}{x+3}$.

Met deze limiet is niets bijzonders aan de hand, voor $x = 3$ is de noemer $\neq 0$, de functie $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x+3}$ is continu in $x = 3$ en dus

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{3^2+6}{3+3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Maar als je L'Hôpital probeert te gebruiken dan krijg je

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2+6)'}{(x+3)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6 \neq \frac{5}{2} \quad (!)$$

Dus dit gaat mis.

Gebruik L'Hôpital alleen als het nodig is!

De regel van L'Hôpital geldt alleen voor $0/0$-limieten of voor ∞/∞-limieten, niet voor limieten die je op een 'gewone' manier uit kan rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+6}{x+3}$.

Met deze limiet is niets bijzonders aan de hand, voor $x = 3$ is de noemer $\neq 0$, de functie $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x+3}$ is continu in $x = 3$ en dus

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{3^2+6}{3+3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Maar als je L'Hôpital probeert te gebruiken dan krijg je

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2+6)'}{(x+3)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6 \neq \frac{5}{2} \quad (!)$$

Dus dit gaat mis.

Ga voordat je L'Hôpital wil gaan gebruiken eerst na of je wel te maken hebt met een $0/0$-limiet of een ∞/∞-limiet.
Gebruik L'Hôpital alleen als het nodig is!

Ingewikkelder voorbeelden

Wanneer je op een $0/0$-limiet de regel van L'Hôpital toepast en daarna weer een $0/0$-limiet krijgt moet je weer de regel van L'Hôpital toepassen, en dat herhalen net zolang totdat je geen $0/0$-limiet meer hebt.

Ingewikkelder voorbeelden

Wanneer je op een 0/0-limiet de regel van L'Hôpital toepast en daarna weer een 0/0-limiet krijgt moet je weer de regel van L'Hôpital toepassen, en dat herhalen net zolang totdat je geen 0/0-limiet meer hebt.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Ingewikkelder voorbeelden

Wanneer je op een 0/0-limiet de regel van L'Hôpital toepast en daarna weer een 0/0-limiet krijgt moet je weer de regel van L'Hôpital toepassen, en dat herhalen net zolang totdat je geen 0/0-limiet meer hebt.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \text{(teller en noemer differentiëren)}$$

Ingewikkelder voorbeelden

Wanneer je op een 0/0-limiet de regel van L'Hôpital toepast en daarna weer een 0/0-limiet krijgt moet je weer de regel van L'Hôpital toepassen, en dat herhalen net zolang totdat je geen 0/0-limiet meer hebt.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad &\overset{0/0}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \text{(teller en noemer differentiëren)} \\
&\overset{0/0}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \quad \text{(teller en noemer differentiëren)}
\end{aligned}
$$

Ingewikkelder voorbeelden

Wanneer je op een 0/0-limiet de regel van L'Hôpital toepast en daarna weer een 0/0-limiet krijgt moet je weer de regel van L'Hôpital toepassen, en dat herhalen net zolang totdat je geen 0/0-limiet meer hebt.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \text{(teller en noemer differentiëren)}\\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} \quad \text{(teller en noemer differentiëren)}\\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \quad \text{(teller en noemer differentiëren).}
\end{aligned}$$

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^{-2} x - 1}$$

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^{-2} x - 1} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)}$$

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Voorbeeld 2. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^{-2} x - 1} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)}$$

in plaats van L'Hôpital te gebruiken
strepen we in teller en noemer $-\sin x$ weg;
dat mag, want $\sin x \neq 0$ omdat x naar 0 nadert
maar niet gelijk wordt aan 0

Ingewikkelder voorbeelden

Je kan altijd wel 0/0-limieten uitrekenen door één of meer keren L'Hôpital toe te passen, maar soms kan je rekenwerk besparen met wat slimmigheidjes (als je zelf niet op die slimmigheidjes komt kun je natuurlijk altijd L'Hôpital gebruiken, dat werkt altijd maar kost meer tijd).

Voorbeeld 2. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^{-2} x - 1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{-2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)}$$

in plaats van L'Hôpital te gebruiken
strepen we in teller en noemer $-\sin x$ weg;
dat mag, want $\sin x \neq 0$ omdat x naar 0 nadert
maar niet gelijk wordt aan 0

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-2\cos^{-3} x} = -\frac{1}{2}.$$

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Bereken $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{5/2}}{e^x}$.

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{5/2}}{e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{e^x}$$

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{5/2}}{e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{e^x}$$

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Bereken $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{e^x}$$

$$\overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1/2}}{e^x}$$

Een ∞/∞-limiet

We laten zien hoe we een limiet die we al eerder hebben gezien kunnen berekenen met de regel van L'Hôpital.

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{5/2}}{e^x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2}}{e^x} &\overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{e^x} \\
&\overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1/2}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{x^{1/2}e^x} = 0.
\end{aligned}$$

Deel 2: Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Het idee is om dit soort limieten om te werken tot $0/0$-limieten of ∞/∞-limieten en dan de regel van L'Hôpital toe te passen.
Er is geen standaardmethode om dit te doen, je moet dit van geval tot geval bekijken.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Het idee is om dit soort limieten om te werken tot $0/0$-limieten of ∞/∞-limieten en dan de regel van L'Hôpital toe te passen.
Er is geen standaardmethode om dit te doen, je moet dit van geval tot geval bekijken.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x$ waarbij $a > 0$.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Het idee is om dit soort limieten om te werken tot $0/0$-limieten of ∞/∞-limieten en dan de regel van L'Hôpital toe te passen.
Er is geen standaardmethode om dit te doen, je moet dit van geval tot geval bekijken.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x$ waarbij $a > 0$.

Er geldt dat $\lim_{x \downarrow 0} x = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$ dus dit is een $0 \cdot \infty$-limiet.
We werken dit om tot een ∞/∞-limiet en passen L'Hôpital toe.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Het idee is om dit soort limieten om te werken tot $0/0$-limieten of ∞/∞-limieten en dan de regel van L'Hôpital toe te passen.
Er is geen standaardmethode om dit te doen, je moet dit van geval tot geval bekijken.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x$ waarbij $a > 0$.

Er geldt dat $\lim_{x \downarrow 0} x = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$ dus dit is een $0 \cdot \infty$-limiet.
We werken dit om tot een ∞/∞-limiet en passen L'Hôpital toe.

$$\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x \quad = \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-a}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{-1}}{-a x^{-a-1}}$$

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Het idee is om dit soort limieten om te werken tot $0/0$-limieten of ∞/∞-limieten en dan de regel van L'Hôpital toe te passen.
Er is geen standaardmethode om dit te doen, je moet dit van geval tot geval bekijken.

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x$ waarbij $a > 0$.

Er geldt dat $\lim_{x \downarrow 0} x = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$ dus dit is een $0 \cdot \infty$-limiet.
We werken dit om tot een ∞/∞-limiet en passen L'Hôpital toe.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-a}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{-1}}{-ax^{-a-1}} \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{a+1} \cdot x^{-1}}{-a} = \lim_{x \downarrow 0} -a^{-1} x^a = 0.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

Er geldt dat $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{\sin x}$ beide naar ∞ gaan als x naar 0 daalt, en beide naar $-\infty$ gaan als x naar 0 stijgt. Dus dit is een $\infty - \infty$-limiet.
We brengen de breuken onder één noemer en kijken of we L'Hôpital kunnen toepassen.

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

Er geldt dat $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{\sin x}$ beide naar ∞ gaan als x naar 0 daalt, en beide naar $-\infty$ gaan als x naar 0 stijgt. Dus dit is een $\infty - \infty$-limiet.
We brengen de breuken onder één noemer en kijken of we L'Hôpital kunnen toepassen.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \qquad \text{dit is een } 0/0\text{-limiet}$$

Voorbeeld 2. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

Er geldt dat $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{\sin x}$ beide naar ∞ gaan als x naar 0 daalt, en beide naar $-\infty$ gaan als x naar 0 stijgt. Dus dit is een $\infty - \infty$-limiet.
We brengen de breuken onder één noemer en kijken of we L'Hôpital kunnen toepassen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \qquad \text{dit is een } 0/0\text{-limiet} \\ &\overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + 1 \cdot \sin x} \end{aligned}$$

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

Er geldt dat $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{\sin x}$ beide naar ∞ gaan als x naar 0 daalt, en beide naar $-\infty$ gaan als x naar 0 stijgt. Dus dit is een $\infty - \infty$-limiet.
We brengen de breuken onder één noemer en kijken of we L'Hôpital kunnen toepassen.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \qquad \text{dit is een } 0/0\text{-limiet} \\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + 1 \cdot \sin x} \\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{-x \sin x + 1 \cdot \cos x + \cos x} = \frac{0}{0 + 1 + 1} = 0.
\end{aligned}
$$

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Limieten van $f(x)^{g(x)}$ schrijven we als e-macht:

$f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

We bereken eerst de limiet van $g(x) \ln f(x)$ en nemen daarna de e-macht.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Limieten van $f(x)^{g(x)}$ schrijven we als e-macht:

$f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

We bereken eerst de limiet van $g(x) \ln f(x)$ en nemen daarna de e-macht.

Voorbeeld 3. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^{\sqrt{x}}$.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Limieten van $f(x)^{g(x)}$ schrijven we als e-macht:

$f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

We bereken eerst de limiet van $g(x) \ln f(x)$ en nemen daarna de e-macht.

Voorbeeld 3. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} x^{\sqrt{x}}$.

Dit is een 0^0-limiet. Er geldt $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x^{1/2} \ln x}$.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Limieten van $f(x)^{g(x)}$ schrijven we als e-macht:

$f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

We bereken eerst de limiet van $g(x) \ln f(x)$ en nemen daarna de e-macht.

Voorbeeld 3. Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^{\sqrt{x}}$.

Dit is een 0^0-limiet. Er geldt $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x^{1/2} \ln x}$.

We hebben gezien dat $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^{1/2} \ln x = 0$.

Dus $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \downarrow 0} e^{x^{1/2} \ln x} = e^0 = 1$.

Voorbeeld 4. Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Limieten van type $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Voorbeeld 4. Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Dit is een ∞^0-limiet. Er geldt $x^{1/x} = e^{\ln x / x}$.

Voorbeeld 4. Bereken $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Dit is een ∞^0-limiet. Er geldt $x^{1/x} = e^{\ln x / x}$.

We hebben al eens gezien dat $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ maar we bewijzen dit nog eens met L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Voorbeeld 4. Bereken $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Dit is een ∞^0-limiet. Er geldt $x^{1/x} = e^{\ln x / x}$.

We hebben al eens gezien dat $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ maar we bewijzen dit nog eens met L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Dus

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = e^0 = 1.$$

Voorbeeld 5. Bereken $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$.

Voorbeeld 5. Bereken $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$.

Dit is een 1^∞-limiet. Er geldt $(1+x)^{1/x} = e^{\ln(1+x)/x}$.

Voorbeeld 5. Bereken $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$.

Dit is een 1^∞-limiet. Er geldt $(1+x)^{1/x} = e^{\ln(1+x)/x}$.

We hebben gezien dat $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Dus $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e^1 = e$.

Einde van het college