CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

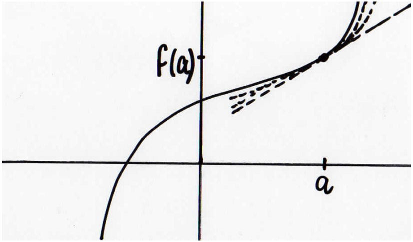
11e college: Taylorpolynomen

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Taylorpolynomen

Benaderingen van functies

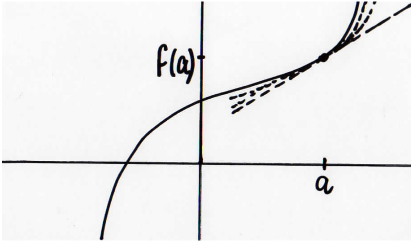


Gegeven is een differentieerbare functie f. We willen $f(x)$ benaderen voor waarden van x dichtbij a.

Je kan $f(x)$ voor x dichtbij a benaderen met $f(a) + f'(a)(x - a)$. Dit is de **lineaire benadering** van $f(x)$. De grafiek van deze lineaire benadering is de raaklijn aan de grafiek van f in $(a, f(a))$.

Deze lineaire benadering is redelijk maar het kan vaak beter.

Benaderingen van functies



We willen $f(x)$ beter benaderen met polynomen van graad 2 (kwadratische benadering), van graad 3 (kubische benadering), of met polynomen van hogere graad.

Dit is zinvol, want zo'n functie $f(x)$ is vaak moeilijk te berekenen, of kan niet exact worden berekend. Maar waarden van polynomen kunnen we wel exact berekenen.

Hiervoor gaan we **Taylorpolynomen** invoeren.

Voor de definitie van die polynomen hebben we hogere afgeleiden en faculteiten nodig.

Hogere afgeleiden

De nulde afgeleide van een functie f, notatie $f^{(0)}$, is de functie f zelf.

De (eerste) afgeleide van f geven we aan met f' of $f^{(1)}$ of $\dfrac{df}{dx}$.

Als f' differentieerbaar is, dan geven we de afgeleide daarvan aan met f'' of $f^{(2)}$ of $\dfrac{d^2f}{dx^2}$. Dit is de tweede afgeleide van f.

Als f n keer differentieerbaar is, dat wil zeggen, f is differentieerbaar, f' is differentieerbaar, de tweede afgeleide is differentieerbaar, enzovoort en dit n keer, dan krijgen we de n-de afgeleide van f, notatie $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

We zeggen dat f n keer continu differentieerbaar is als $f^{(n)}$ een continue functie is
(er zijn rare functies waarvoor $f^{(n)}$ wel bestaat maar niet continu is).

Faculteiten

We definiëren $n!$ ('n faculteit', Engels 'n factorial') door

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n \quad \text{(product van de eerste } n \text{ natuurlijke getallen).}$$

Verder definiëren we $0! = 1$.

Faculteiten

We definiëren $n!$ ('n faculteit', Engels 'n factorial') door

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n \quad \text{(product van de eerste } n \text{ natuurlijke getallen).}$$

Verder definiëren we $0! = 1$.

Volgens deze regel geldt

$$1! = 1 \cdot 0!, \quad 2! = 2 \cdot 1!, \quad 3! = 3 \cdot 2!, \quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

Faculteiten

We definiëren $n!$ ('n faculteit', Engels 'n factorial') door

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n \quad \text{(product van de eerste } n \text{ natuurlijke getallen).}$$

Verder definiëren we $0! = 1$.

Volgens deze regel geldt

$$1! = 1 \cdot 0!, \quad 2! = 2 \cdot 1!, \quad 3! = 3 \cdot 2!, \quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

$n!$ groeit erg snel. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} &2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \\ &5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \quad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720, \ldots \end{aligned}$$

Een goede benadering voor $n!$ is $\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$.

Als n naar ∞ gaat, dan nadert het quotiënt $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}$ naar 1.

Definitie van het Taylorpolynoom

Laat f een functie zijn die in een interval rondom $x = a$ n keer differentieerbaar is. Het **n-de Taylorpolynoom van f rond $x = a$** is gegeven door

$$p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

Definitie van het Taylorpolynoom

Laat f een functie zijn die in een interval rondom $x = a$ n keer differentieerbaar is. Het **n-de Taylorpolynoom van f rond $x = a$** is gegeven door

$$p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

.

De bijzondere eigenschap van dit polynoom is, dat de 0-de tot en met n-de afgeleide van $p_{n,a}$ in $x = a$ gelijk zijn aan de 0-de tot en met n-de afgeleide van f in $x = a$, dat wil zeggen,

$$p_{n,a}(a) = f(a),\ p'_{n,a}(a) = f'(a),\ p^{(2)}_{n,a}(a) = f^{(2)}(a), \ldots, p^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Taylorpolynomen van e^x

Het n-de Taylorpolynoom van $f(x)$ rond $x = 0$ is gegeven door

$$\begin{aligned} p_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Taylorpolynomen van e^x

Het n-de Taylorpolynoom van $f(x)$ rond $x = 0$ is gegeven door

$$\begin{aligned} p_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Voor $f(x) = e^x$ geldt dat $f(x) = f'(x) = f^{(2)}(x) = \cdots = e^x$,
$f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = \cdots = 1$.
Dus het n-de Taylorpolynoom van e^x rond $x = 0$ is gelijk aan

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Feit: Als we n naar ∞ laten gaan, dan nadert $p_{n,0}(x)$ naar e^x.

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

We zetten de coëfficiënten $f(1)$, $f'(1)$, $\frac{f^{(2)}(1)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(1)}{3!}$ in een tabel:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln x$	0	0

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

We zetten de coëfficiënten $f(1)$, $f'(1)$, $\frac{f^{(2)}(1)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(1)}{3!}$ in een tabel:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln x$	0	0
1	x^{-1}	1	1

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

We zetten de coëfficiënten $f(1)$, $f'(1)$, $\frac{f^{(2)}(1)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(1)}{3!}$ in een tabel:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln x$	0	0
1	x^{-1}	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

We zetten de coëfficiënten $f(1)$, $f'(1)$, $\frac{f^{(2)}(1)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(1)}{3!}$ in een tabel:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln x$	0	0
1	x^{-1}	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$2x^{-3}$	2	$\frac{2}{3!} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

Taylorpolynomen van $\ln x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$.
Als we $f(x) = \ln x$ schrijven dan is dit gelijk aan

$$p_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

We zetten de coëfficiënten $f(1)$, $f'(1)$, $\frac{f^{(2)}(1)}{2!}$, $\frac{f^{(3)}(1)}{3!}$ in een tabel:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$\ln x$	0	0
1	x^{-1}	1	1
2	$-x^{-2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$2x^{-3}$	2	$\frac{2}{3!} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3}$

Dus het 3e Taylorpolynoom van $\ln x$ rond $x = 1$ is

$$p_{3,1}(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Je hoeft dit niet verder uit te werken.

Een wat ingewikkelder voorbeeld

We bepalen het 2e Taylorpolynoom van $f(x) = e^{x+x^2}$ rond $x = 0$.

Dit is gelijk aan $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.

Een wat ingewikkelder voorbeeld

We bepalen het 2e Taylorpolynoom van $f(x) = e^{x+x^2}$ rond $x = 0$.

Dit is gelijk aan $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^{x+x^2}	1	1

Een wat ingewikkelder voorbeeld

We bepalen het 2e Taylorpolynoom van $f(x) = e^{x+x^2}$ rond $x = 0$.

Dit is gelijk aan $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^{x+x^2}	1	1
1	$(1+2x)e^{x+x^2}$	1	1

Een wat ingewikkelder voorbeeld

We bepalen het 2e Taylorpolynoom van $f(x) = e^{x+x^2}$ rond $x = 0$.

Dit is gelijk aan $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^{x+x^2}	1	1
1	$(1+2x)e^{x+x^2}$	1	1
2	$2 \cdot e^{x+x^2} + (1+2x) \cdot (1+2x)e^{x+x^2}$	3	$\frac{3}{2}$
	$= (2+1+4x+4x^2)e^{x+x^2}$		
	$= (3+4x+4x^2)e^{x+x^2}$		

Een wat ingewikkelder voorbeeld

We bepalen het 2e Taylorpolynoom van $f(x) = e^{x+x^2}$ rond $x = 0$.

Dit is gelijk aan $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	e^{x+x^2}	1	1
1	$(1+2x)e^{x+x^2}$	1	1
2	$2 \cdot e^{x+x^2} + (1+2x)\cdot(1+2x)e^{x+x^2}$ $= (2+1+4x+4x^2)e^{x+x^2}$ $= (3+4x+4x^2)e^{x+x^2}$	3	$\frac{3}{2}$

Dus het 2e Taylorpolynoom van e^{x+x^2} rond $x = 0$ is

$$p_{2,0}(x) = 1 + x + \tfrac{3}{2}x^2.$$

Deel 2: Foutafschattingen

De Lagrange-restterm

Gegeven is een functie $f(x)$. We willen $f(x)$ benaderen door het n-de Taylorpolynoom $p_{n,a}(x)$ rond $x = a$. Daarbij maken we een fout die we schrijven als $R_{n+1,a}(x)$. Dus

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x), \quad R_{n+1,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x).$$

Lagrange gaf een uitdrukking voor deze fout in termen van de $(n+1)$-de afgeleide van f, dit is ook de reden waarom we in de notatie $n+1$ gebruiken en niet n.

We noemen deze fout de **Lagrange-restterm**.

De Lagrange-restterm

Laat $f(x)$ een functie zijn die $n+1$ keer continu differentieerbaar is voor alle x in de buurt van a.
Dan geldt voor alle x in de buurt van a,

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$$

waarbij

$$p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

en

$$R_{n+1,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

hier is s een getal dat ergens tussen a en x ligt.

Restterm van een polynomen

Feit. Laat $f(x)$ een polynoom is van graad n en $p_{n,a}(x)$ het n-de Taylorpolynoom van $f(x)$ rond $x = a$.

Dan is $R_{n+1,a}(x) = 0$, $f(x) = p_{n,a}(x)$.

Restterm van een polynomen

Feit. Laat $f(x)$ een polynoom is van graad n en $p_{n,a}(x)$ het n-de Taylorpolynoom van $f(x)$ rond $x = a$.

Dan is $R_{n+1,a}(x) = 0$, $f(x) = p_{n,a}(x)$.

Bewijs. Er geldt $f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$ met
$R_{n+1,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, waarbij s ergens tussen a en x ligt.

Als je een polynoom differentieert gaat de graad daarvan met 1 omlaag.

Als je een polynoom van graad n n keer differentieert gaat elke keer de graad met 1 omlaag, en blijft er iets van graad 0 over, dat is een constante.

Als je die nog een keer differentieert krijg je 0.

Dus de $(n+1)$-de afgeleide van een polynoom van graad n is gelijk aan 0.

Hieruit volgt dat $R_{n+1,a}(x) = 0$, $f(x) = p_{n,a}(x)$.

Nogmaals de Lagrange-restterm

Als $f(x)$ $n+1$ keer continu differentieerbaar voor alle x in de buurt van a, dan geldt voor die x,

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x),$$

waarbij

$$R_{n+1,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{met } s \text{ ergens tussen } a \text{ en } x.$$

Probleem

Neem aan dat $f(x)$ een ingewikkelde functie is (geen polynoom) die we niet exact uit kunnen rekenen. Daarom willen we $f(x)$ benaderen door het n-de Taylorpolynoom $p_{n,a}(x)$, die we wel exact uit kunnen rekenen.

We willen weten hoe groot de fout is die we maken als we $f(x)$ door $p_{n,a}(x)$ benaderen, daarom willen we graag de Lagrange-restterm $R_{n+1,a}(x)$ bekijken.

We weten niets over het getal s, alleen maar dat het ergens tussen a en x ligt. Daarom kunnen we $R_{n+1,a}(x)$ niet precies uitrekenen maar alleen afschatten.

Voorbeeld 1

We bepalen voor enkele functies $f(x)$ een Taylorpolynoom $p_{n,a}(x)$ rond $x = a$, de Lagrange restterm, en geven een afschatting voor de fout als we $f(x)$ willen benaderen door $p_{n,a}(x)$ voor een bepaalde waarde van x.

Voorbeeld 1

We bepalen voor enkele functies $f(x)$ een Taylorpolynoom $p_{n,a}(x)$ rond $x = a$, de Lagrange restterm, en geven een afschatting voor de fout als we $f(x)$ willen benaderen door $p_{n,a}(x)$ voor een bepaalde waarde van x.

Gegeven is de functie $f(x) = \cos x$.

(a) Bepaal het 3e Taylor-polynoom $p_{3,0}(x)$ van $f(x)$ rond $x = 0$.

(b) Bepaal de Lagrange-restterm $R_{4,0}(x)$.

(c) We benaderen $\cos 0,01$ door $p_{3,0}(0,01)$. Laat zien dat

$$|\cos 0,01 - p_{3,0}(0,01)| < 10^{-9}$$

(het is niet de bedoeling dat je $\cos 0,01$ en $p_{3,0}(0,01)$ met je calculator uitrekent en het verschil neemt; je moet de Lagrange-restterm afschatten).

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\cos x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom $p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$ van $f(x) = \cos x$ rond $x = 0$ en de Lagrange-restterm $R_{4,0}(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}x^4$ met s tussen 0 en x.

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\cos x$

We bepalen het 3*e* Taylorpolynoom $p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$ van $f(x) = \cos x$ rond $x = 0$ en de Lagrange-restterm $R_{4,0}(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}x^4$ met s tussen 0 en x.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\sin x$	0	0
2	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$\sin x$	0	0
4	$\cos x$		

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\cos x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom
$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$ van $f(x) = \cos x$ rond $x = 0$ en de Lagrange-restterm $R_{4,0}(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}x^4$ met s tussen 0 en x.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\sin x$	0	0
2	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$\sin x$	0	0
4	$\cos x$		

3e Taylorpolynoom rond $x = 0$: $p_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\cos x$

We bepalen het 3e Taylorpolynoom $p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$ van $f(x) = \cos x$ rond $x = 0$ en de Lagrange-restterm $R_{4,0}(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}x^4$ met s tussen 0 en x.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\sin x$	0	0
2	$-\cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$\sin x$	0	0
4	$\cos x$		

3e Taylorpolynoom rond $x = 0$: $p_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

Lagrange-restterm $R_{4,0}(x) = \frac{1}{4!}\cos s \cdot x^4 = \frac{1}{24}\cos s \cdot x^4$
met s tussen 0 en x.

Foutafschatting

We willen $\cos 0,01$ benaderen door $p_{3,0}(0,01)$ en de fout afschatten.

We hebben gezien dat $p_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Dus $p_{3,0}(0,01) = 0,9995$.

Algemeen geldt $\cos x - p_{3,0}(x) = R_{4,0}(x)$ met $R_{4,0}(x) = \frac{1}{24}\cos s \cdot x^4$ waarbij s ergens tussen 0 en x ligt.

Dus in het bijzonder $\cos 0,01 - p_{3,0}(0,01) = R_{4,0}(0,01)$ met $R_{4,0}(0,01) = \frac{1}{24}\cos s \cdot 0,01^4$ waarbij s ergens tussen 0 en $0,01$ ligt.

Foutafschatting

We willen $\cos 0,01$ benaderen door $p_{3,0}(0,01)$ en de fout afschatten.

We hebben gezien dat $p_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Dus $p_{3,0}(0,01) = 0,9995$.

Algemeen geldt $\cos x - p_{3,0}(x) = R_{4,0}(x)$ met $R_{4,0}(x) = \frac{1}{24}\cos s \cdot x^4$ waarbij s ergens tussen 0 en x ligt.

Dus in het bijzonder $\cos 0,01 - p_{3,0}(0,01) = R_{4,0}(0,01)$ met $R_{4,0}(0,01) = \frac{1}{24}\cos s \cdot 0,01^4$ waarbij s ergens tussen 0 en 0,01 ligt.

Wat de waarde van s is weten we niet, maar er geldt $0 < \cos s < 1$. Dus

$$\begin{aligned} |\cos 0,01 - p_{3,0}(0,01)| = |R_{4,0}(0,01)| &< \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot (10^{-2})^4 \\ &= \frac{1}{24}10^{-8} < 10^{-9}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Bepaal het 2e Taylor-polynoom $p_{2,64}(x)$ van $f(x)$ rond $x = 64$.

(b) Bepaal de Lagrange-restterm $R_{3,64}(x)$.

(c) We benaderen $\sqrt[3]{65}$ door $p_{2,64}(65)$. Laat zien dat

$$|\sqrt[3]{65} - p_{2,64}(65)| < 10^{-6}$$

(het is niet de bedoeling dat je $\sqrt[3]{65}$ en $p_{2,64}(65)$ met je calculator uitrekent en het verschil neemt; je moet de Lagrange-restterm afschatten).

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\sqrt[3]{x}$

We bepalen het 2e Taylorpolynoom $p_{2,64}(x)$ van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ rond $x = 64$ en de Lagrange-restterm $R_{3,64}(x)$.

Er geldt $p_{2,64}(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f^{(2)}(64)}{2!}(x-64)^2$,

$R_{3,64}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-64)^3$ met s tussen 64 en x.

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\sqrt[3]{x}$

We bepalen het 2e Taylorpolynoom $p_{2,64}(x)$ van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ rond $x = 64$ en de Lagrange-restterm $R_{3,64}(x)$.

Er geldt $p_{2,64}(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f^{(2)}(64)}{2!}(x-64)^2$,

$R_{3,64}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-64)^3$ met s tussen 64 en x.

Gebruik $64^{1/3} = 4$, $64^{2/3} = (64^{1/3})^2 = 4^2$, etc.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(64)$	$f^{(n)}(64)/n!$
0	$x^{1/3}$	$64^{1/3} = 4$	4
1	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\frac{1}{3}64^{-2/3} = \frac{1}{3}4^{-2} = \frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
2	$\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$	$-\frac{2}{9}64^{-5/3} = -\frac{2}{9}4^{-5} = -\frac{1}{4608}$	$-\frac{1}{9216}$
3	$(-\frac{5}{3})\cdot(-\frac{2}{9})x^{-8/3} = \frac{10}{27}x^{-8/3}$		

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\sqrt[3]{x}$

We bepalen het 2e Taylorpolynoom $p_{2,64}(x)$ van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ rond $x = 64$ en de Lagrange-restterm $R_{3,64}(x)$.

Er geldt $p_{2,64}(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f^{(2)}(64)}{2!}(x-64)^2$,

$R_{3,64}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-64)^3$ met s tussen 64 en x.

Gebruik $64^{1/3} = 4$, $64^{2/3} = (64^{1/3})^2 = 4^2$, etc.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(64)$	$f^{(n)}(64)/n!$
0	$x^{1/3}$	$64^{1/3} = 4$	4
1	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\frac{1}{3}64^{-2/3} = \frac{1}{3}4^{-2} = \frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
2	$\frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$	$-\frac{2}{9}64^{-5/3} = -\frac{2}{9}4^{-5} = -\frac{1}{4608}$	$-\frac{1}{9216}$
3	$(-\frac{5}{3}) \cdot (-\frac{2}{9})x^{-8/3} = \frac{10}{27}x^{-8/3}$		

2e Taylorpol. rond $x = 64$: $p_{2,64}(x) = 4 + \frac{1}{48}(x-64) - \frac{1}{9216}(x-64)^2$.

Taylorpolynoom en Lagrange-restterm van $\sqrt[3]{x}$

We bepalen het 2e Taylorpolynoom $p_{2,64}(x)$ van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ rond $x = 64$ en de Lagrange-restterm $R_{3,64}(x)$.

Er geldt $p_{2,64}(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f^{(2)}(64)}{2!}(x-64)^2$,

$R_{3,64}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-64)^3$ met s tussen 64 en x.

Gebruik $64^{1/3} = 4$, $64^{2/3} = (64^{1/3})^2 = 4^2$, etc.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(64)$	$f^{(n)}(64)/n!$
0	$x^{1/3}$	$64^{1/3} = 4$	4
1	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\frac{1}{3}64^{-2/3} = \frac{1}{3}4^{-2} = \frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$
2	$\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})x^{-5/3} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$	$-\frac{2}{9}64^{-5/3} = -\frac{2}{9}4^{-5} = -\frac{1}{4608}$	$-\frac{1}{9216}$
3	$(-\frac{5}{3})\cdot(-\frac{2}{9})x^{-8/3} = \frac{10}{27}x^{-8/3}$		

2e Taylorpol. rond $x = 64$: $p_{2,64}(x) = 4 + \frac{1}{48}(x-64) - \frac{1}{9216}(x-64)^2$.

Lagrange-restterm $R_{3,64}(x) = \frac{1}{3!}\cdot\frac{10}{27}s^{-8/3}(x-64)^3 = \frac{5}{81}s^{-8/3}(x-64)^3$ met s tussen 64 en x.

Foutafschatting

We willen $\sqrt[3]{65}$ benaderen door $p_{2,64}(65)$ en de fout afschatten.

Algemeen geldt $\sqrt[3]{x} - p_{2,64}(x) = R_{3,64}(x)$ met
$R_{3,64}(x) = \frac{5}{81} s^{-8/3}(x-64)^3$ waarbij s ergens tussen 64 en x ligt.

Dus in het bijzonder $\sqrt[3]{65} - p_{2,64}(65) = R_{3,64}(65)$ met
$R_{3,64}(65) = \frac{5}{81} s^{-8/3}$ waarbij s ergens tussen 64 en 65 ligt.

Foutafschatting

We willen $\sqrt[3]{65}$ benaderen door $p_{2,64}(65)$ en de fout afschatten.

Algemeen geldt $\sqrt[3]{x} - p_{2,64}(x) = R_{3,64}(x)$ met
$R_{3,64}(x) = \frac{5}{81} s^{-8/3}(x-64)^3$ waarbij s ergens tussen 64 en x ligt.

Dus in het bijzonder $\sqrt[3]{65} - p_{2,64}(65) = R_{3,64}(65)$ met
$R_{3,64}(65) = \frac{5}{81} s^{-8/3}$ waarbij s ergens tussen 64 en 65 ligt.

Wat de waarde van s is weten we niet, maar er geldt
$s^{-8/3} < 64^{-8/3} = 4^{-8}$.

Dus $|\sqrt[3]{65} - p_{2,64}(65)| = |R_{3,64}(65)| < \frac{5}{81} 4^{-8} < 10^{-6}$.

Einde van het college