CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

12e college: Oud tentamen

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1

vrijdag 25 oktober 2019, 14:15-16:15

- Vul op elk tentamenpapier **DUIDELIJK LEESBAAR** je naam (in HOOFDLETTERS) en collegekaartnummer in.
- Op de achterzijde staan vier opgaven en een lijstje met formules.
- Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Een eenvoudige wetenschappelijke calculator mag wel.
- Motiveer elk antwoord door middel van een berekening of redenering.
- Links in de marge staat het maximale aantal punten voor een opgave. Het cijfer is (aantal behaalde punten)/10.

---

8 **1.** *a)* Bepaal de nulpunten van $x^3 - 3x - 2$.

4 *b)* Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x - 3$ (dus een andere functie dan in a)!). Laat zien dat f een nulpunt heeft in $(2, 3)$.

8 *c)* Bepaal de extremen van f met plaats, grootte en aard en schets de grafiek van f. Heeft f buiten het nulpunt in b) nog andere nulpunten?

2. Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

12 *a)* Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c links-continu is in $x = 2$, de waarden(n) van c waarvoor f_c rechts-continu is in $x = 2$, en de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 2$.

8 *b)* Bepaal $\lim\limits_{x \downarrow 1} f_c(x)$ voor elke waarde van c.

10 **3.** Gegeven zijn twee positieve getallen x, y met $xy = 1$. Bepaal x en y zodat $x^3 + y^2$ minimaal is.

10 **4.** Bereken $\lim_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{(\ln x)^2}$.

10 **5.** *a)* Bepaal het 2^e Taylorpolynoom $p_{2,4}(x)$ van $f(x) = x^{3/2}$ rond $x = 4$.

5 *b)* Bepaal de restterm $R_{3,4}(x)$.

5 *c)* Laat zien dat $|(4,5)^{3/2} - p_{2,4}(4,5)| \leq 2^{-10}$.

6. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

5 *a)* Bepaal het domein van f. Geef aan waar $f(x) = 0$, waar $f(x) > 0$ en waar $f(x) < 0$. Bepaal de verticale asymptoten van f. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

5 *b)* Ga na of f horizontale of scheve asymptoten heeft voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ en zo ja, bepaal deze.

6 *c)* Bepaal voor welke waarden van x de functie f stijgend of dalend is. Bepaal ook de eventuele extremen van f met plaats, grootte en aard.

4 *d)* Schets de grafiek van f.

Formules goniometrie

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$;
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$;
$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Standaardlimieten voor functies

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{b^x} = 0$ als $b > 1$; $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^a}{x^q} = 0$ als $q > 0$.

Opgave 1a

Bepaal de nulpunten van $x^3 - 3x - 2$.

Opgave 1a

Bepaal de nulpunten van $x^3 - 3x - 2$.

Als $f(x) = x^3 - 3x - 2$ een geheeltallig nulpunt heeft, dan is dat een positieve of negatieve deler van -2, dus 1, -1, 2 of -2.

Er geldt $f(1) = -4$, $f(-1) = 0$. Dus -1 is een nulpunt van f.
Hieruit volgt dat $f(x)$ deelbaar is door $x - (-1) = x + 1$.

Opgave 1a

Bepaal de nulpunten van $x^3 - 3x - 2$.

Als $f(x) = x^3 - 3x - 2$ een geheeltallig nulpunt heeft, dan is dat een positieve of negatieve deler van -2, dus 1, -1, 2 of -2.

Er geldt $f(1) = -4$, $f(-1) = 0$. Dus -1 is een nulpunt van f. Hieruit volgt dat $f(x)$ deelbaar is door $x - (-1) = x + 1$.

We voeren een staartdeling uit.

$$
\begin{array}{lll}
x+1/ & x^3 - 3x - 2 & \backslash x^2 - x - 2 \\
 & x^3 + x^2 \quad - & \\
\hline
 & -x^2 - 3x - 2 & \\
 & -x^2 - x \quad - & \\
\hline
 & -2x - 2 & \\
 & -2x - 2 \quad - & \\
\hline
 & 0 & \qquad x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)
\end{array}
$$

Opgave 1a

Bepaal de nulpunten van $x^3 - 3x - 2$.

We hebben gezien dat $x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$.

Er geldt dat $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Dus
$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$.

We zien dat $x = -1$, $x = 2$ de nulpunten zijn van $x^3 - 3x - 2$.

Opgave 1b

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x - 3$ (dus een andere functie dan in a)!). Laat zien dat f een nulpunt heeft in het open interval $(2, 3)$.

Opgave 1b

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x - 3$ (dus een andere functie dan in a)!). Laat zien dat f een nulpunt heeft in het open interval $(2, 3)$.

We passen de tussenwaardestelling toe.

Ieder polynoom is een continue functie, dus in het bijzonder is f continu (niet vergeten op te merken, belangrijke voorwaarde voor de tussenwaardestelling!)

Verder geldt $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 15 > 0$.

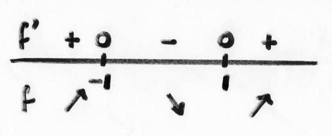
Dus wegens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in $(2, 3)$.

Opgave 1c

Bepaal de extremen van $f(x) = x^3 - 3x - 3$ met plaats, grootte en aard en schets de grafiek van f. Heeft f buiten het nulpunt in b) nog andere nulpunten?

Bepaal de extremen van $f(x) = x^3 - 3x - 3$ met plaats, grootte en aard en schets de grafiek van f. Heeft f buiten het nulpunt in b) nog andere nulpunten?

Er geldt $f'(x) = 3x^2 - 3$. We geven het tekenoverzicht van f'.



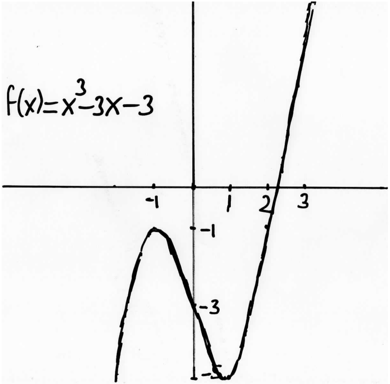
De functie f neemt geen absoluut maximum aan omdat $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, en ook geen absoluut minimum omdat $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, dus eventuele maxima en minima van f moeten wel relatief zijn.

Uit het tekenoverzicht van f' volgt dat f een relatief maximum in $x = -1$ aanneemt, met grootte $f(-1) = -1$, en een relatief minimum in $x = 1$ met grootte $f(1) = -5$.

Opgave 1c

Bepaal de extremen van $f(x) = x^3 - 3x - 3$ met plaats, grootte en aard en schets de grafiek van f. Heeft f buiten het nulpunt in b) nog andere nulpunten?

Uit de grafiek van $f(x)$ hieronder blijkt dat $f(x)$ maar één nulpunt heeft.



Opgave 2a

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c links-continu is in $x = 2$, de waarden(n) van c waarvoor f_c rechts-continu is in $x = 2$, en de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 2$.

Opgave 2a

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c links-continu is in $x = 2$, de waarden(n) van c waarvoor f_c rechts-continu is in $x = 2$, en de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 2$.

Links-continuïteit: $\lim\limits_{x \uparrow 2} f_c(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} = {}^2\log(2^c) = c,$

$$\begin{aligned} f_c \text{ links-continu in } x = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow 2} f_c(x) = f_c(2) \Longleftrightarrow c = c^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad c^2 - c = 0 \Longleftrightarrow c(c-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad c = 0 \text{ of } c = 1. \end{aligned}$$

Opgave 2a

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c links-continu is in $x = 2$, de waarden(n) van c waarvoor f_c rechts-continu is in $x = 2$, en de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 2$.

Rechts-continuïteit: $\lim\limits_{x \downarrow 2} f_c(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} x - c^2 = 2 - c^2$,

$$\begin{aligned} f_c \text{ rechts-continu in } x = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \downarrow 2} f_c(x) = f_c(2) \Longleftrightarrow 2 - c^2 = c^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2c^2 = 2 \Longleftrightarrow c = 1 \text{ of } c = -1. \end{aligned}$$

Opgave 2a

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c links-continu is in $x = 2$, de waarden(n) van c waarvoor f_c rechts-continu is in $x = 2$, en de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 2$.

Continuïteit:

f_c links-continu in $x = 2 \iff c = 0$ of $c = 1$,
f_c rechts-continu in $x = 2 \iff c = -1$ of $c = 1$,

$$\begin{aligned} f_c \text{ continu in } x = 2 &\iff f_c \text{ links-continu en rechts-continu in } x = 2 \\ &\iff c = 1. \end{aligned}$$

Opgave 2b

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal $\lim\limits_{x \downarrow 1} f_c(x)$ voor elke waarde van c.

Opgave 2b

Gegeven is de functie

$$f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{{}^2\log(x^c)}{x-1} & \text{voor } 1 < x < 2, \\ c^2 & \text{voor } x = 2, \\ x - c^2 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

Bepaal $\lim_{x \downarrow 1} f_c(x)$ voor elke waarde van c.

Wanneer x naar 1 daalt, dan is

$$f_c(x) = \frac{{}^2\log(x^c)}{x-1} = \frac{c \cdot {}^2\log x}{x-1} = \frac{c \cdot \ln x / \ln 2}{x-1} = \frac{c}{\ln 2} \cdot \frac{\ln x}{x-1}.$$

Merk op dat de limiet voor x daalt naar 1 van deze functie een $0/0$-limiet is. We mogen dus L'Hôpital toepassen. Er volgt

$$\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{c}{\ln 2} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x \downarrow 1} \frac{c}{\ln 2} \cdot \frac{1/x}{1} = \frac{c}{\ln 2}.$$

Opgave 3

Gegeven zijn twee positieve getallen x, y met $xy = 1$. Bepaal x en y zodat $x^3 + y^2$ minimaal is.

Opgave 3

Gegeven zijn twee positieve getallen x, y met $xy = 1$. Bepaal x en y zodat $x^3 + y^2$ minimaal is.

Er geldt $y = x^{-1}$ en $x > 0$. Dus we moeten bepalen voor welke waarde van x de functie $f(x) = x^3 + x^{-2}$ zijn absolute minimum op $(0, \infty)$ aanneemt.

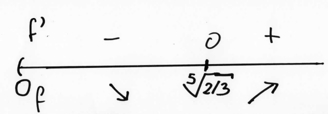
Er geldt $f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3} = \dfrac{3x^5 - 2}{x^3} = \dfrac{3(x^5 - 2/3)}{x^3}$.

Opgave 3

Gegeven zijn twee positieve getallen x, y met $xy = 1$. Bepaal x en y zodat $x^3 + y^2$ minimaal is.

Er geldt $y = x^{-1}$ en $x > 0$. Dus we moeten bepalen voor welke waarde van x de functie $f(x) = x^3 + x^{-2}$ zijn absolute minimum op $(0, \infty)$ aanneemt.

Er geldt $f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3} = \dfrac{3x^5 - 2}{x^3} = \dfrac{3(x^5 - 2/3)}{x^3}$.



Uit het tekenoverzicht van f' blijkt dat $f(x)$ voor $x = \sqrt[5]{2/3}$ zijn absolute minimum op $(0, \infty)$ aanneemt.

Omdat $y = x^{-1}$ volgt hieruit dat $x = \sqrt[5]{2/3}$ en $y = \sqrt[5]{3/2}$ de gevraagde getallen zijn.

Opgave 4

Bereken $\lim_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{(\ln x)^2}$.

Opgave 4

Bereken $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{(\ln x)^2}$.

Dit is een 0/0-limiet (namelijk $\cos\pi = -1$ en $\ln 1 = 0$) dus we kunnen L'Hôpital toepassen. Er geldt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(\ln x)^2} &\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin\pi x}{2\ln x/x} = \lim_{x\to 1} \frac{-x\cdot\pi\sin\pi x}{2\ln x} \\
&\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-x\cdot\pi^2\cos\pi x - 1\cdot\pi\sin\pi x}{2/x} \\
&= \frac{-\pi^2\cos\pi - \pi\sin\pi}{2/1} = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Opgave 5a, 5b

Bepaal het 2e Taylorpolynoom $p_{2,4}(x)$ van $f(x) = x^{3/2}$ rond $x = 4$.
Bepaal de restterm $R_{3,4}(x)$.

Opgave 5a, 5b

Bepaal het 2e Taylorpolynoom $p_{2,4}(x)$ van $f(x) = x^{3/2}$ rond $x = 4$.
Bepaal de restterm $R_{3,4}(x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$	$f^{(n)}(4)/n!$
0	$x^{3/2}$	$4^{3/2} = 2^3 = 8$	8
1	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{2} \cdot 4^{1/2} = 3$	3
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{4}x^{-1/2}$	$\frac{3}{4} \cdot 4^{-1/2} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
3	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^{-3/2} = -\frac{3}{8}x^{-3/2}$		

Opgave 5a, 5b

Bepaal het 2e Taylorpolynoom $p_{2,4}(x)$ van $f(x) = x^{3/2}$ rond $x = 4$.
Bepaal de restterm $R_{3,4}(x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$	$f^{(n)}(4)/n!$
0	$x^{3/2}$	$4^{3/2} = 2^3 = 8$	8
1	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{2} \cdot 4^{1/2} = 3$	3
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{4}x^{-1/2}$	$\frac{3}{4} \cdot 4^{-1/2} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
3	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^{-3/2} = -\frac{3}{8}x^{-3/2}$		

2e Taylorpolynoom

$$p_{2,4}(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f^{(2)}(4)}{4!}(x-4)^2 = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2$$

Opgave 5a, 5b

Bepaal het 2e Taylorpolynoom $p_{2,4}(x)$ van $f(x) = x^{3/2}$ rond $x = 4$.
Bepaal de restterm $R_{3,4}(x)$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$	$f^{(n)}(4)/n!$
0	$x^{3/2}$	$4^{3/2} = 2^3 = 8$	8
1	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{2} \cdot 4^{1/2} = 3$	3
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{-1/2} = \frac{3}{4}x^{-1/2}$	$\frac{3}{4} \cdot 4^{-1/2} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
3	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^{-3/2} = -\frac{3}{8}x^{-3/2}$		

2e Taylorpolynoom

$$p_{2,4}(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f^{(2)}(4)}{4!}(x-4)^2 = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2$$

Restterm

$$R_{3,4}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-4)^3 = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3}{8}s^{-3/2}\right)(x-4)^3 = -\frac{1}{16}s^{-3/2}(x-4)^3$$

waarbij s tussen 4 en x ligt.

Opgave 5c

Laat zien dat $|(9/2)^{3/2} - p_{2,4}(9/2)| \leq 2^{-10}$, waarbij $p_{2,4}(x)$ het 2e Taylorpolynoom rond $x = 4$ van $f(x) = x^{3/2}$ is.

Opgave 5c

Laat zien dat $|(9/2)^{3/2} - p_{2,4}(9/2)| \leq 2^{-10}$, waarbij $p_{2,4}(x)$ het 2e Taylorpolynoom rond $x = 4$ van $f(x) = x^{3/2}$ is.

In het algemeen is $f(x) - p_{2,4}(x) = R_{3,4}(x)$.

We hebben gezien dat $R_{3,4}(x) = -\frac{1}{16}s^{-3/2}(x-4)^3$ waarbij s tussen 4 en x ligt.

Dus $(9/2)^{3/2} - p_{2,4}(9/2) = R_{3,4}(9/2) = -\frac{1}{16}s^{-3/2}(\frac{1}{2})^3$ waarbij s tussen 4 en 9/2 ligt.

De precieze waarde van s kennen we niet, maar in ieder geval is $s^{-3/2} \leq 4^{-3/2} = \frac{1}{8}$.
Dus

$$|(9/2)^{3/2} - p_{2,4}(9/2)| = |R_{3,4}(9/2)| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = 2^{-10}.$$

Opgave 6a

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Bepaal het domein van f.Geef aan waar $f(x) = 0$, waar $f(x) > 0$ en waar $f(x) < 0$. Bepaal de verticale asymptoten van f. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

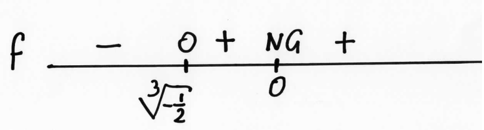
Opgave 6a

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Bepaal het domein van f.Geef aan waar $f(x) = 0$, waar $f(x) > 0$ en waar $f(x) < 0$. Bepaal de verticale asymptoten van f. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Het domein van f bestaat uit alle x waar de noemer ongelijk aan 0 is, dus $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$x = 0$ is de verticale asymptoot van f.



$f(x) = 0$ voor $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $f(x) < 0$ voor $x < \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $f(x) > 0$ voor $x < \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $x \neq 0$.

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$.

Opgave 6b

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Ga na of f horizontale of scheve asymptoten heeft voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ en zo ja, bepaal deze.

Opgave 6b

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Ga na of f horizontale of scheve asymptoten heeft voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ en zo ja, bepaal deze.

f heeft een scheve asymptoot voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ omdat graad teller$=1+$graad noemer.

We kunnen die scheve asymptoot vinden met een staartdeling, maar in dit geval gaat het veel sneller. Er geldt

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

Dus

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Hieruit volgt dat $y = 2x$ een scheve asymptoot is van f voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

Omdat $f(x) - 2x = \frac{1}{x^2} > 0$ ligt de grafiek van f overal boven de lijn $y = 2x$.

Opgave 6c

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Bepaal voor welke waarden van x de functie f stijgend of dalend is.
Bepaal ook de eventuele extremen van f met plaats, grootte en aard.

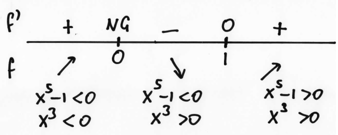
Opgave 6c

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Bepaal voor welke waarden van x de functie f stijgend of dalend is.
Bepaal ook de eventuele extremen van f met plaats, grootte en aard.

Er geldt $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 6x^2 - 2x(2x^3+1)}{x^4} = \dfrac{6x^4 - 4x^4 - 2x}{x^4}$

$$= \frac{2x^6 - 2x}{x^4} = \frac{2(x^5-1)}{x^3}.$$



Uit het tekenoverzicht van f blijkt dat f stijgend is voor $x < 0$, dalend voor $0 < x < 1$, en stijgend voor $x > 1$.

f neemt geen maximum aan in $x = 0$ omdat die daar niet is gedefinieerd.
f neemt een minimum aan in $x = 1$ met grootte $f(1) = 3$
Dit minimum is relatief, want $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + x^{-2} = -\infty$.

Opgave 6d

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Schets de grafiek van f.

Opgave 6d

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Schets de grafiek van f.

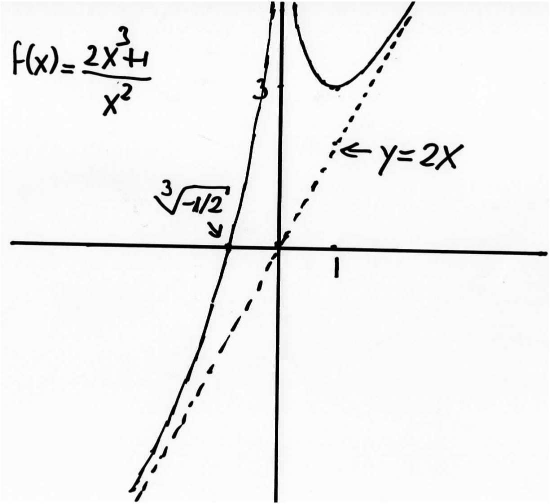
Voordat we de grafiek van f schetsen verzamelen we nog wat we over f hebben gevonden; de grafiek van f staat op de volgende dia:

- f heeft domein $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, f heeft verticale asymptoot $x = 0$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$,
  $f(x) < 0$ voor $x < \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $f(x) = 0$ voor $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $f(x) > 0$ voor $x > \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $x \neq 0$;
- f heeft een scheve asymptoot $y = 2x$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$, de grafiek van f ligt boven de scheve asymptoot;
- f is stijgend voor $x < 0$, dalend voor $0 < x < 1$ en stijgend voor $x > 1$,
  f neemt in $x = 1$ een relatief minimum aan van grootte 3.

Opgave 6d

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Schets de grafiek van f.



Einde van het college