CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

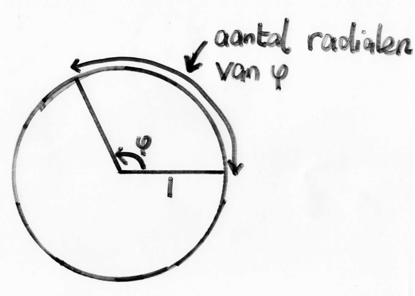
2e college: Goniometrie

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Trigonometrie

Radialen



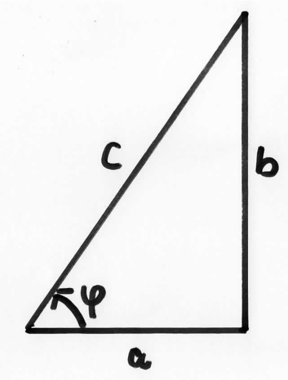
In het vervolg zullen we voor hoeken alleen met radialen werken, niet met graden.

Het aantal radialen van een hoek is de lengte van de boog op een cirkel van straal 1 die door de hoek wordt afgesneden.

De volledige cirkel van straal 1 heeft lengte 2π. Dus $360^0 = 2\pi$.

graden	360^0	270^0	180^0	90^0	60^0	45^0	30^0	0^0
radialen	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

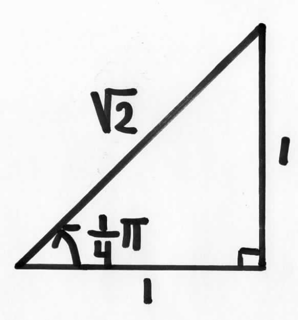
Klassieke definities van sinus, cosinus en tangens



$$\cos\varphi = \frac{a}{c}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{c}, \quad \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} \quad \text{als } 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi), \quad \sin\varphi = \sin(\pi - \varphi), \quad \tan\varphi = -\tan(\pi - \varphi)$$
$$\text{als } \tfrac{1}{2}\pi < \varphi \le \pi.$$

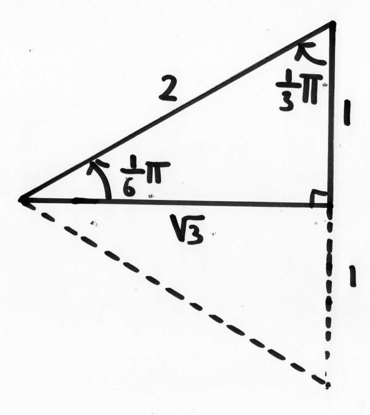
Enkele hoeken



$$\cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \tan\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} = 1$$

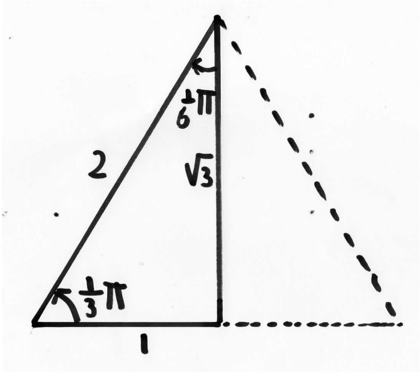
$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a}.$$

Enkele hoeken



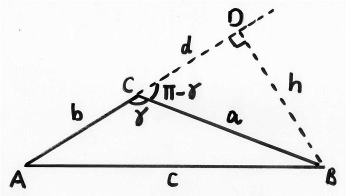
$$\cos\tfrac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin\tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}, \quad \tan\tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Enkele hoeken



$$\cos \tfrac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}, \quad \sin \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \tan \tfrac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

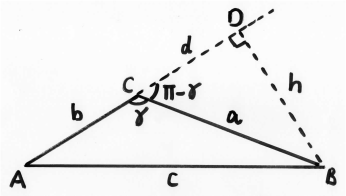
De cosinusregel



Cosinusregel

Voor een driehoek met zijden a, b, c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c.

De cosinusregel

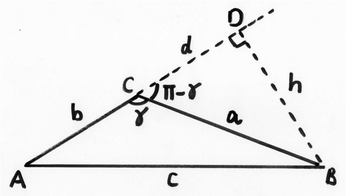


Cosinusregel

Voor een driehoek met zijden a, b, c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c.

We moeten twee gevallen apart bekijken: $\gamma \leq \frac{1}{2}\pi$ (scherpe hoek) en $\gamma > \frac{1}{2}\pi$ (stompe hoek). We bekijken alleen het geval $\gamma > \frac{1}{2}\pi$.

De cosinusregel



Cosinusregel

Voor een driehoek met zijden a, b, c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c.

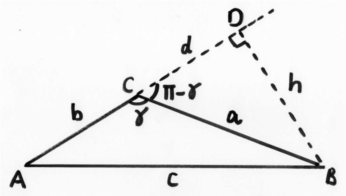
Bewijs voor het geval $\gamma > \frac{1}{2}\pi$, eerste stap.

Pas de Stelling van Pythagoras toe op de rechthoekige driehoek ADB: $c^2 = h^2 + (b + d)^2$.

Pas Pythagoras ook toe op driehoek CDB: $a^2 = h^2 + d^2$.
Dit geeft $h^2 = a^2 - d^2$.

Als we dit combineren krijgen we $c^2 = a^2 - d^2 + (b + d)^2$.

De cosinusregel



Cosinusregel

Voor een driehoek met zijden a, b, c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c.

Bewijs voor het geval $\gamma > \frac{1}{2}\pi$, tweede stap.

We hebben gezien dat $c^2 = a^2 - d^2 + (b+d)^2$.

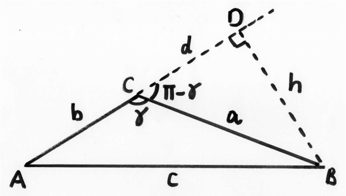
We werken $(b+d)^2$ uit: $(b+d)^2 = b^2 + 2bd + d^2$.

Verder is $\frac{d}{a} = \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$. Dus $d = -a\cos\gamma$.

Als we dit alles combineren vinden we:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - d^2 + (b+d)^2 = a^2 - d^2 + b^2 + 2bd + d^2 = a^2 + b^2 + 2bd \\ &= a^2 + b^2 + 2b\cdot(-a\cos\gamma) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

De cosinusregel



Cosinusregel

Voor een driehoek met zijden a, b, c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, waarbij γ de hoek is tegenover zijde c.

Voorbeeld. Een driehoek heeft zijden $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$. Bepaal de hoek γ tegenover zijde c.

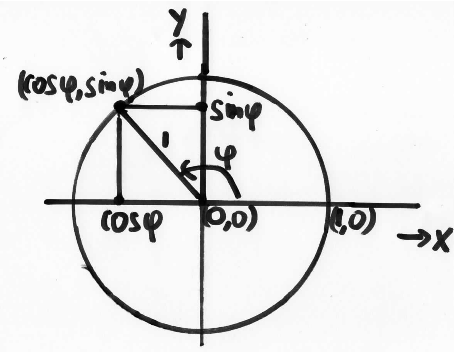
Oplossing. Wegens de cosinusregel is

$$7^2 = 3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\gamma,\ \ 49 = 34-30\cos\gamma,\ \ -30\cos\gamma = 15,\ \ \cos\gamma = -\tfrac{1}{2}.$$

Omdat $\cos\gamma < 0$ geldt $\frac{1}{2}\pi < \gamma \leq \pi$.
Er geldt $\cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma = \frac{1}{2}$, dus $\pi - \gamma = \frac{1}{3}\pi$, $\gamma = \frac{2}{3}\pi$.

Algemene definities, van sinus, cosinus en tangens, rekenregels

Algemene definities van sinus, cosinus en tangens



Neem een cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1.
Neem op die cirkel het punt dat correspondeert met de hoek φ.

Dan is $\cos\varphi$ de x-coördinaat van dat punt en $\sin\varphi$ de y-coördinaat.
Verder is $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Uit de stelling van Pythagoras volgt $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Voorbeeld

Van een hoek φ is gegeven dat $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$.
Bepaal $\cos\varphi$ en $\tan\varphi$.

Voorbeeld

Van een hoek φ is gegeven dat $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$.
Bepaal $\cos\varphi$ en $\tan\varphi$.

Oplossing. Er geldt: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Hieruit volgt
$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$. Dus

$$\cos^2\varphi = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Dit geeft $\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$ (namelijk $144 = 12^2$).
We moeten het teken nog bepalen.

Voorbeeld

Van een hoek φ is gegeven dat $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$ en $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$.
Bepaal $\cos\varphi$ en $\tan\varphi$.

Oplossing. Er geldt: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Hieruit volgt $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$. Dus

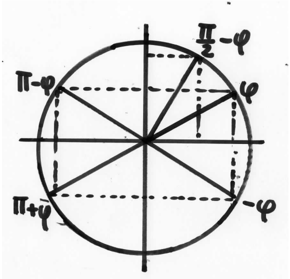
$$\cos^2\varphi = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Dit geeft $\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$ (namelijk $144 = 12^2$).
We moeten het teken nog bepalen.

Omdat $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < 0$ is $\cos\varphi > 0$. Dus het teken is $+$.

We zien dat $\cos\varphi = \frac{12}{13}$ en $\tan\varphi = \frac{-5/13}{12/13} = -\frac{5}{12}$.

Enkele formules



$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \sin\varphi \qquad \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \cos\varphi \qquad \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$$
$$\tan(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = 1/\tan(\varphi) \qquad \tan(\pi - \varphi) = -\tan\varphi$$

$$\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi \qquad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\tan(\pi + \varphi) = \tan\varphi \qquad \tan(-\varphi) = -\tan\varphi$$

$$\cos(2\pi + \varphi) = \cos\varphi$$
$$\sin(2\pi + \varphi) = \sin\varphi$$
$$\tan(2\pi + \varphi) = \tan\varphi$$

Voorbeeld

hoek	cos	sin	tan
0	1	0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	niet gedefinineerd

Uitgaande van dit basislijstje (**goed onthouden!**) en de formules op de vorige dia kunnen we andere hoeken berekenen.

Bereken $\cos(-\frac{379}{4}\pi)$.

Voorbeeld

hoek	cos	sin	tan
0	1	0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	0	1	niet gedefinineerd

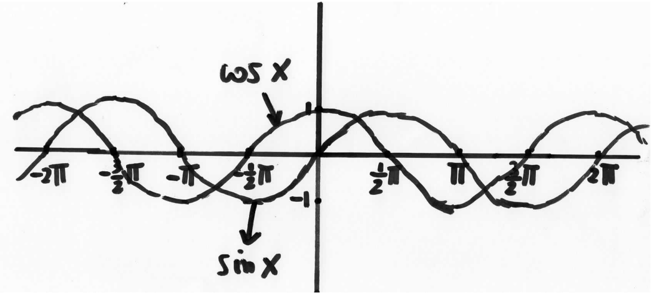
Uitgaande van dit basislijstje (**goed onthouden!**) en de formules op de vorige dia kunnen we andere hoeken berekenen.

Bereken $\cos(-\frac{379}{4}\pi)$.

Er geldt $\frac{379}{4} = 94\frac{3}{4}$. Dus

$$\begin{aligned}\cos(-\tfrac{379}{4}\pi) &= \cos\tfrac{379}{4}\pi = \cos(94\pi + \tfrac{3}{4}\pi) = \cos\tfrac{3}{4}\pi = \cos(\pi - \tfrac{1}{4}\pi) \\ &= -\cos\tfrac{1}{4}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Grafieken van sinus en cosinus

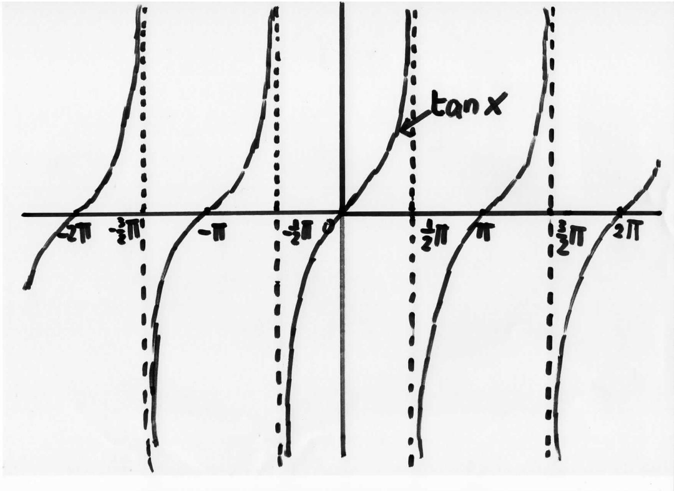


$\cos x$ en $\sin x$ zijn periodiek met periode 2π, dat wil zeggen de grafiek blijft hetzelfde als we hem $2\pi, 4\pi, \ldots$ naar rechts of naar links schuiven.

Er geldt
$\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \sin(\pi - (\frac{1}{2}\pi + x)) = \sin(\pi - \frac{1}{2}\pi - x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x.$

Dus als we de grafiek van $\sin x$ $\frac{1}{2}\pi$ naar links verschuiven krijgen we de grafiek van $\cos x$.

Grafiek van tangens



$\tan x$ is periodiek met periode π.

$\tan x$ heeft **verticale asymptoten** voor $x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$.

Deel 3: Somformules en verdubbelingsformules

Som, verschil- en verdubbelingsformules

Somformules

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Som, verschil- en verdubbelingsformules

Somformules

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Als we in de formules voor $\sin(\alpha+\beta)$ en $\cos(\alpha+\beta)$ β vervangen door $-\beta$, en gebruiken dat $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, krijgen we:

Verschilformules

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Som, verschil- en verdubbelingsformules

Somformules

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Als we in de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ β vervangen door $-\beta$, en gebruiken dat $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, krijgen we:

Verschilformules

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Als we in de somformules β vervangen door α krijgen we:

Verdubbelingsformules

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

We krijgen de tweede en derde formule voor $\cos 2\alpha$ door $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ en $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ te gebruiken.

Voorbeeld

Bereken $\sin \frac{1}{12}\pi$ en $\cos \frac{1}{12}\pi$.

Voorbeeld

Bereken $\sin \frac{1}{12}\pi$ en $\cos \frac{1}{12}\pi$.

We gebruiken dat $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$. We passen de verschilformules
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$,
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ toe met $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\beta = \frac{1}{6}\pi$:

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{12}\pi &= \sin \tfrac{1}{4}\pi \cos \tfrac{1}{6}\pi - \sin \tfrac{1}{6}\pi \cos \tfrac{1}{4}\pi \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \\
\cos \tfrac{1}{12}\pi &= \cos \tfrac{1}{4}\pi \cos \tfrac{1}{6}\pi + \sin \tfrac{1}{4}\pi \sin \tfrac{1}{6}\pi \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Tweede voorbeeld

Bereken $\sin \frac{1}{8}\pi$ en $\cos \frac{1}{8}\pi$.

Tweede voorbeeld

Bereken $\sin \frac{1}{8}\pi$ en $\cos \frac{1}{8}\pi$.

We passen de verdubbelingsformules $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ toe met $\alpha = \frac{1}{8}\pi$ en gebruiken dat $\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

Tweede voorbeeld

Bereken $\sin \frac{1}{8}\pi$ en $\cos \frac{1}{8}\pi$.

We passen de verdubbelingsformules $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ toe met $\alpha = \frac{1}{8}\pi$ en gebruiken dat $\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 \tfrac{1}{8}\pi - 1 = \cos \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2\cos^2 \tfrac{1}{8}\pi = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ &\Longrightarrow \quad \cos^2 \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \\ 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{8}\pi = \cos \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2\sin^2 \tfrac{1}{8}\pi = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ &\Longrightarrow \quad \sin^2 \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

We hebben nu de kwadraten van de cosinus en sinus berekend, maar we moeten nog nagaan of de cosinus en sinus positief of negatief zijn. Omdat $0 < \frac{1}{8}\pi < \frac{1}{2}\pi$ zijn de cosinus en sinus positief. Dus

$$\cos \tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}, \quad \sin \tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}}.$$

Door herhaaldelijk somformules en verdubbelingsformules toe te passen kun je ook de sinus en cosinus van $\frac{1}{16}\pi$, $\frac{1}{24}\pi$, etc. uitrekenen.

Derde voorbeeld

Druk $\cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi)$ uit in $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$.

Derde voorbeeld

Druk $\cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi)$ uit in $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$.

Uit de verschilformule $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ met $\beta = \frac{2}{3}\pi$ volgt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \tfrac{2}{3}\pi) &= \cos\alpha\cos\tfrac{2}{3}\pi + \sin\alpha\sin\tfrac{2}{3}\pi \\ &= \cos\alpha\cdot(-\tfrac{1}{2}) + \sin\alpha\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha. \end{aligned}$$

We hebben gebruikt dat $\cos\frac{2}{3}\pi = \cos(\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\cos\frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{2}$,

$$\sin\tfrac{2}{3}\pi = \sin(\pi - \tfrac{1}{3}\pi) = \sin\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Einde van het college