CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

3e college: Inverteerbare functies, exponenten, logaritmen

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Inverteerbare functies

Deelverzamelingen van $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen.

Als D een deelverzameling is van $\mathbb{R}$ dan schrijven we $x \in D$ (x is een element van D) als x tot D behoort.

Als D_1, D_2 twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn dan is

- $D_1 \cap D_2$ de **doorsnede** van D_1 en D_2, dat is de verzameling van alle x die zowel tot D_1 als tot D_2 horen,
- $D_1 \cup D_2$ de **vereniging** van D_1 en D_2 dat wil zeggen de verzameling van alle x die tot D_1 of tot D_2 of tot beiden horen,
- $D_1 \backslash D_2$ het **verschil** van D_1 en D_2, dat wil zeggen de verzameling van alle x die wel tot D_1 maar niet tot D_2 horen.

We geven met $\emptyset$ de lege verzameling aan, dat is de verzameling die geen enkel element bevat.

Intervallen

(a, b) is de verzameling van alle reële getallen x met $a < x < b$, notatie $\{x \in \mathbb{R} | \, a < x < b\}$ (open interval).

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x \leq b\}$ (gesloten interval),

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x \leq b\}$,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, x < b\}$,

$\mathbb{R} \backslash \{a\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq a\}$, $\mathbb{R} \backslash \{a, b\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq a, \, x \neq b\}$

Intervallen

(a, b) is de verzameling van alle reële getallen x met $a < x < b$, notatie $\{x \in \mathbb{R} | \, a < x < b\}$ (open interval).

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a \le x \le b\}$ (gesloten interval),

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x \le b\}$,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | \, x \ge a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, x < b\}$,

$\mathbb{R} \backslash \{a\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x \ne a\}$, $\mathbb{R} \backslash \{a, b\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x \ne a, \, x \ne b\}$

Als $a < b$ dan kun je $\mathbb{R} \backslash \{a, b\}$ ook schrijven als vereniging van intervallen $(-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, \infty)$ maar dat is natuurlijk erg onhandig.

De doorsnede van twee intervallen is weer een interval, of de lege verzameling.

Voorbeeld $[3, 5] \cap (4, 6] = (4, 5]$, $[3, 4] \cap (4, 6] = \emptyset$ (lege verzameling).

Functies

Laat D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn.
Een **functie** f van D naar $\mathbb{R}$, notatie $f : D \to \mathbb{R}$ is een voorschrift dat aan elke $x \in D$ een getal $f(x) \in \mathbb{R}$ toevoegt.

Dit voorschrift kan van alles zijn.

We noemen D het **domein** van f.

Als we een functie f geven zonder een domein D te specificeren, nemen we voor het domein de verzameling van alle x waarvoor $f(x)$ is gedefinieerd.

Functies

Laat D een deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn.
Een **functie** f van D naar $\mathbb{R}$, notatie $f : D \to \mathbb{R}$ is een voorschrift dat aan elke $x \in D$ een getal $f(x) \in \mathbb{R}$ toevoegt.

Dit voorschrift kan van alles zijn.

We noemen D het **domein** van f.

Als we een functie f geven zonder een domein D te specificeren, nemen we voor het domein de verzameling van alle x waarvoor $f(x)$ is gedefinieerd.

Voorbeelden: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ heeft domein $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ (noemer mag niet 0 zijn).

$f(x) = \sqrt{x}$ heeft domein $[0, \infty)$ (je kan geen wortel, vierdemachtswortel, zesdemachtswortel, ... trekken van getallen < 0).

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ heeft domein $\mathbb{R}$ (je kan van elk reëel getal, positief, negatief of 0 de derdemachtswortel, en meer algemeen vijfdemachtswortel, zevendemachtswortel, ... trekken; bijvoorbeeld $\sqrt[3]{-1} = -1$ want $(-1)^3 = -1$).

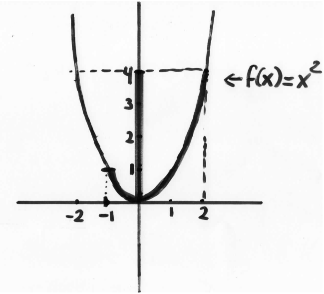
Functies

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een functie. De verzameling getallen die door f worden aangenomen noemen we het **bereik** van f.

Opmerking. Als we schrijven $f : D \to \mathbb{R}$ betekent dat alleen dat f zijn waarden in $\mathbb{R}$ aanneemt, niet dat alle waarden van $\mathbb{R}$ worden aangenomen; dus het bereik van f kan best kleiner zijn dan $\mathbb{R}$.

Voorbeelden:
$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heeft bereik $[0, \infty)$ want x^2 neemt alleen getallen ≥ 0 aan.

$f(x) = x^2 : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ heeft bereik $[0, 4]$.



Inverteerbare functies

Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we **injectief** of **inverteerbaar** als er bij elke y uit het bereik van f precies één $x \in D$ is met $f(x) = y$.

Bijvoorbeeld functies f die stijgend zijn op D of dalend op D zijn inverteerbaar.

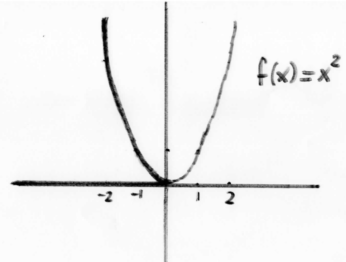
Inverteerbare functies

Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ noemen we **injectief** of **inverteerbaar** als er bij elke y uit het bereik van f precies één $x \in D$ is met $f(x) = y$.

Bijvoorbeeld functies f die stijgend zijn op D of dalend op D zijn inverteerbaar.

Voorbeelden:
$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is niet inverteerbaar, want bij elke $y > 0$ horen twee x-waarden uit $\mathbb{R}$ met $x^2 = y$, namelijk $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$.

$f(x) = x^2 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ is wel inverteerbaar want bij elke $y \geq 0$ hoort precies één x uit het domein $D = (-\infty, 0]$ met $x^2 = y$, namelijk $x = -\sqrt{y}$.

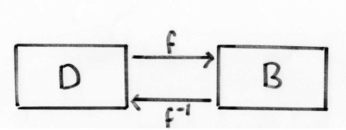


De inverse functie

Zijn $f : D \to \mathbb{R}$ een inverteerbare functie en B het bereik van f.

Dan hoort bij elke $y \in B$ precies één $x \in D$ met $f(x) = y$. We kunnen nu een nieuwe functie definiëren met domein B, de **inverse functie** f^{-1}, zodat $f^{-1}(y) = x$.

Zij f een inverteerbare functie met domein D en bereik B.
Voor $x \in D$, $y \in B$ geldt: $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.
Het domein van f^{-1} is B en het bereik van f^{-1} is D.



De inverse functie

Zijn $f : D \to \mathbb{R}$ een inverteerbare functie en B het bereik van f.

Dan hoort bij elke $y \in B$ precies één $x \in D$ met $f(x) = y$. We kunnen nu een nieuwe functie definiëren met domein B, de **inverse functie** f^{-1}, zodat $f^{-1}(y) = x$.

Zij f een inverteerbare functie met domein D en bereik B.
Voor $x \in D$, $y \in B$ geldt: $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.
Het domein van f^{-1} is B en het bereik van f^{-1} is D.

Voorbeeld. $f(x) = x^2 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$.
Er geldt: $x^2 = y, x \leq 0 \iff x = -\sqrt{y}$.
Het bereik van f is $[0, \infty)$.
Dus de inverse van f is $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ met domein $[0, \infty)$ en bereik $(-\infty, 0]$.
(we schrijven altijd x voor het getal dat in de functie wordt ingevuld).

Algemene vraag

Gegeven is een functie f. We willen het domein D en bereik B van f bepalen, nagaan of f inverteerbaar is, en zo ja, de inverse van f bepalen.

Algemene vraag

Gegeven is een functie f. We willen het domein D en bereik B van f bepalen, nagaan of f inverteerbaar is, en zo ja, de inverse van f bepalen.

De algemene methode is als volgt:

- Schrijf $y = f(x), x \in D$.
- Probeer x uit te drukken in y.
- De waarden van y waarvoor x in y kan worden uitgedrukt vormen het bereik van f.
- Als er maar één manier is om x in y uit te drukken dan is f inverteerbaar. Dan krijgen we de inverse door in die uitdrukking y door x te vervangen.
- Als er meerdere mogelijkheden zijn om x in y uit te drukken dan is f niet inverteerbaar.

Algemene vraag

Gegeven is een functie f. We willen het domein D en bereik B van f bepalen, nagaan of f inverteerbaar is, en zo ja, de inverse van f bepalen.

De algemene methode is als volgt:

- Schrijf $y = f(x), x \in D$.
- Probeer x uit te drukken in y.
- De waarden van y waarvoor x in y kan worden uitgedrukt vormen het bereik van f.
- Als er maar één manier is om x in y uit te drukken dan is f inverteerbaar. Dan krijgen we de inverse door in die uitdrukking y door x te vervangen.
- Als er meerdere mogelijkheden zijn om x in y uit te drukken dan is f niet inverteerbaar.

Voorbeeld. Gegeven is $f(x) = x^6$. Het domein is $\mathbb{R}$.
Stel $y = x^6$. Er geldt $y = x^6 \iff x = \pm\sqrt[6]{y}$ mits $y \geq 0$; als $y < 0$ dan kunnen we x niet in y uitdrukken. Het bereik van f is dus $[0, \infty)$.

f is niet inverteerbaar, want voor $y > 0$ zijn er twee bijbehorende waarden van x, namelijk $\sqrt[6]{y}$ en $-\sqrt[6]{y}$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, d.w.z. alle $x \neq 1$. We proberen de overige vragen op te lossen door $y = f(x), x \neq 1$ te stellen en te kijken of x kan worden uitgedrukt in y.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, d.w.z. alle $x \neq 1$. We proberen de overige vragen op te lossen door $y = f(x), x \neq 1$ te stellen en te kijken of x kan worden uitgedrukt in y.

Er geldt:

$$y = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1 \Longleftrightarrow y(x-1) = 2x.$$

De pijl betekent dat de twee beweringen equivalent zijn, dat wil zeggen de bewering links impliceert de bewering rechts, en de bewering rechts impliceert de bewering links.

Namelijk als $y = \frac{2x}{x-1}$, $x \neq 1$ dan mogen we met $x - 1$ vermenigvuldigen en dan volgt $y(x-1) = 2x$.
Omgekeerd, als $y(x-1) = 2x$ dan is $x \neq 1$ want als je $x = 1$ invult staat er links 0 en rechts 2. We mogen dus door $x - 1$ delen en dan volgt $y = \frac{2x}{x-1}$, $x \neq 1$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, d.w.z. alle $x \neq 1$. We proberen de overige vragen op te lossen door $y = f(x), x \neq 1$ te stellen en te kijken of x kan worden uitgedrukt in y.

Er geldt:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad y(x-1) = 2x \Longleftrightarrow yx - y = 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad x(y-2) = y \Longleftrightarrow x = \frac{y}{y-2}, y \neq 2. \end{aligned}$$

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, d.w.z. alle $x \neq 1$. We proberen de overige vragen op te lossen door $y = f(x), x \neq 1$ te stellen en te kijken of x kan worden uitgedrukt in y.

Er geldt:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad y(x-1) = 2x \Longleftrightarrow yx - y = 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad x(y-2) = y \Longleftrightarrow x = \frac{y}{y-2}, y \neq 2. \end{aligned}$$

Er bestaan alleen x met $f(x) = y$ als $y \neq 2$. Dus het bereik van f is $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Als $y \neq 2$ dan is er precies één x met $f(x) = y$, namelijk $x = \dfrac{y}{y-2}$.

Dus f is inverteerbaar, en $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - 1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Voorbeeld

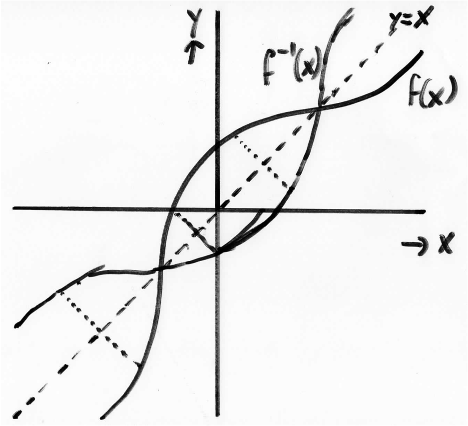
Gegeven is $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - 1}$. Bepaal het domein en bereik van f.
Is f inverteerbaar op zijn domein? Zo ja, bepaal de inverse.

Het domein van f is $\mathbb{R}$ want we kunnen van elk reëel getal de vijfdemachtswortel trekken. We proberen de overige vragen weer op te lossen door $y = f(x)$ te stellen en x uit te drukken in y.

$$y = \sqrt[5]{x^3 - 1} \iff y^5 = x^3 - 1 \iff x^3 = y^5 + 1 \iff x = \sqrt[3]{y^5 + 1}.$$

Voor elke $y \in \mathbb{R}$ bestaat er precies één x met $f(x) = y$, namelijk $x = \sqrt[3]{y^5 + 1}$.
Dus het bereik van f is $\mathbb{R}$, f is inverteerbaar, en $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^5 + 1}$.

Grafieken van f en f^{-1}



We krijgen de grafiek van f^{-1} uit die van f door de grafiek van f te spiegelen in de lijn $y = x$.
Dat komt op het zelfde neer als wanneer we de x- en y-coördinaat verwisselen.

Deel 2: Exponenten en logaritmen

Exponenten

Voor een reëel getal $a > 0$ geldt $a^x =$ het getal a x keer met zichzelf vermenigvuldigd als x een positief geheel getal is.

Dus als x en y positieve gehele getallen zijn, dan is $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Verder is $(a^x)^y$ a^x y keer met zichzelf vermenigvuldigd, dat is hetzelfde als a xy keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus $(a^x)^y = a^{xy}$.

$\sqrt[x]{a}$ is het getal zodat $(\sqrt[x]{a})^x = a$; we schrijven daarom $a^{1/x}$ voor $\sqrt[x]{a}$.

Exponenten

Voor een reëel getal $a > 0$ geldt $a^x =$ het getal a x keer met zichzelf vermenigvuldigd als x een positief geheel getal is.

Dus als x en y positieve gehele getallen zijn, dan is $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Verder is $(a^x)^y$ a^x y keer met zichzelf vermenigvuldigd, dat is hetzelfde als a xy keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus $(a^x)^y = a^{xy}$.

$\sqrt[x]{a}$ is het getal zodat $(\sqrt[x]{a})^x = a$; we schrijven daarom $a^{1/x}$ voor $\sqrt[x]{a}$.

Meer algemeen kun je a^x definiëren voor elk reëel getal x. Er geldt:

Regels voor exponenten

Zijn a en b reëele getallen > 0 en x, y reële getallen. Dan geldt:

$a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$, $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x/a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.
$(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $1^x = 1$ voor alle x, $0^x = 0$ voor alle $x > 0$.

Exponenten

Voor een reëel getal $a > 0$ geldt $a^x =$ het getal a x keer met zichzelf vermenigvuldigd als x een positief geheel getal is.

Dus als x en y positieve gehele getallen zijn, dan is $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Verder is $(a^x)^y$ a^x y keer met zichzelf vermenigvuldigd, dat is hetzelfde als a xy keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus $(a^x)^y = a^{xy}$.

$\sqrt[x]{a}$ is het getal zodat $(\sqrt[x]{a})^x = a$; we schrijven daarom $a^{1/x}$ voor $\sqrt[x]{a}$.

Meer algemeen kun je a^x definiëren voor elk reëel getal x. Er geldt:

Regels voor exponenten

Zijn a en b reëele getallen > 0 en x, y reële getallen. Dan geldt:

$a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$, $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x/a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.
$(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $1^x = 1$ voor alle x, $0^x = 0$ voor alle $x > 0$.

Opmerking. a^{x^y} is in het algemeen ongelijk aan $(a^x)^y$.
Bijvoorbeeld $10^{10^{10}} = 10^{10000000000}$ want $10^{10} = 10000000000$.
Maar $(10^{10})^{10} = 10^{10\cdot 10} = 10^{100}$.

Logaritmen

Logaritme met grondtal a

Zijn a, x reële getallen met $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$.
Dan is ${}^a\log x$ het getal y zodat $a^y = x$.

Dus $a^{{}^a\log x} = x$.

In het boek wordt de notatie $\log_a x$ gebruikt.

Logaritmen

Logaritme met grondtal a

Zijn a, x reële getallen met $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$.
Dan is ${}^a\log x$ het getal y zodat $a^y = x$.

Dus $a^{{}^a\log x} = x$.

In het boek wordt de notatie $\log_a x$ gebruikt.

Voorbeeld ${}^2\log \sqrt[3]{16} = \frac{4}{3}$.
Namelijk $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = (2^4)^{1/3} = 2^{4/3}$.

Logaritmen

Logaritme met grondtal a

Zijn a, x reële getallen met $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$.
Dan is ${}^a\log x$ het getal y zodat $a^y = x$.

Dus $a^{{}^a\log x} = x$.

In het boek wordt de notatie $\log_a x$ gebruikt.

Voorbeeld ${}^2\log \sqrt[3]{16} = \frac{4}{3}$.
Namelijk $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = (2^4)^{1/3} = 2^{4/3}$.

Rekenregels

${}^a\log(x_1 x_2) = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2, \quad {}^a\log(x_1/x_2) = {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2,$
${}^a\log x^b = b \cdot {}^a\log x, \quad {}^{a^b}\log x = b^{-1} \cdot {}^a\log x = {}^a\log x^{1/b}.$

Bewijs van één van de regels:
Schrijf ${}^a\log x_1 = y_1$, ${}^a\log x_2 = y_2$. Dan is $a^{y_1} = x_1$, $a^{y_2} = x_2$.
Dus $a^{y_1+y_2} = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = x_1 \cdot x_2$.
Hieruit volgt ${}^a\log(x_1 x_2) = y_1 + y_2 = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2$. □

Voorbeeld

Bereken ${}^{2}\log 36 + {}^{1/4}\log 81$.

Voorbeeld

Bereken ${}^{2}\log 36 + {}^{1/4}\log 81$.

Het handigste is om 36 en 81 in factoren te ontbinden: $36 = 2^2 3^2$ en $81 = 3^4$.

$$\begin{aligned} {}^{2}\log 36 &= {}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3^2 = 2 + 2 \cdot {}^{2}\log 3, \\ {}^{1/4}\log 81 &= {}^{2^{-2}}\log 81 = {}^{2^{-2}}\log 3^4 = {}^{2}\log(3^4)^{-1/2} = {}^{2}\log 3^{-2} \\ &= -2 \cdot {}^{2}\log 3. \end{aligned}$$

Dus ${}^{2}\log 36 + {}^{1/4}\log 81 = 2$.

Nog wat feiten

- Als $a > 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ stijgend. Hij gaat naar ∞ als x naar ∞ gaat en naar 0 als x naar $-\infty$ gaat.
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $f(x) = a^x$ dalend. Hij gaat naar 0 als x naar ∞ gaat en naar ∞ als x naar $-\infty$ gaat.
- Als $a > 0$ en $a \neq 1$, dan is $f(x) = a^x$ inverteerbaar, met inverse functie $f^{-1}(x) = {}^a\log x$.

De natuurlijke logaritme

De rij getallen $(1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ nadert naar een limietwaarde als n steeds groter wordt.

Deze limietwaarde is $e = 2,718281828459045235360287471352 7\ldots$

De logaritme met grondtal e noemen we de natuurlijke logaritme: $\ln x = {}^e\log x$.

Dus $e^{\ln x} = x$ voor alle x.

De natuurlijke logaritme

De rij getallen $(1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ nadert naar een limietwaarde als n steeds groter wordt.

Deze limietwaarde is $e = 2,718281828459045235360287471352 7\ldots$

De logaritme met grondtal e noemen we de natuurlijke logaritme: $\ln x = {}^e\log x$.

Dus $e^{\ln x} = x$ voor alle x.

Feiten

Zij a een reëel getal met $a > 0$, $a \neq 1$.

(1) $a^x = e^{x \ln a}$.

(2) ${}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

De natuurlijke logaritme

De rij getallen $(1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ nadert naar een limietwaarde als n steeds groter wordt.

Deze limietwaarde is $e = 2,718281828459045235360287471352 7\ldots$

De logaritme met grondtal e noemen we de natuurlijke logaritme:
$\ln x = {}^e\log x$.

Dus $e^{\ln x} = x$ voor alle x.

Feiten

Zij a een reëel getal met $a > 0$, $a \neq 1$.

(1) $a^x = e^{x \ln a}$.

(2) ${}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Bewijs. (1) Gebruik $a = e^{\ln a}$. Dan volgt $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x} = e^{x \ln a}$.

De natuurlijke logaritme

De rij getallen $(1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n, \ldots$ nadert naar een limietwaarde als n steeds groter wordt.

Deze limietwaarde is $e = 2,718281828459045235360287471352\!7\ldots$

De logaritme met grondtal e noemen we de natuurlijke logaritme: $\ln x = {}^e\log x$.

Dus $e^{\ln x} = x$ voor alle x.

Feiten

Zij a een reëel getal met $a > 0$, $a \neq 1$.

(1) $a^x = e^{x \ln a}$.

(2) ${}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Bewijs. (1) Gebruik $a = e^{\ln a}$. Dan volgt $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x} = e^{x \ln a}$.

(2) $a^{\ln x / \ln a} = (e^{\ln a})^{(\ln x/\ln a)} = e^{\ln a \cdot (\ln x / \ln a)} = e^{\ln x} = x$.
Dus $\dfrac{\ln x}{\ln a} = {}^a\log x$.

Einde van het college