CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

4e college: Limieten

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Definities

Het idee van een limiet

Bekijk de functie $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Deze functie is niet gedefinieerd voor $x = 0$. Wat gebeurt er als we x naar 0 laten naderen?

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10^{-2}	$0,4987562112...$	-10^{-2}	$0,5012562893...$
10^{-4}	$0,4999875006...$	-10^{-4}	$0,5000125006...$
10^{-6}	$0,4999998750...$	-10^{-6}	$0,5000001250...$
10^{-8}	$0,4999999987...$	-10^{-8}	$0,5000000012...$
10^{-10}	$0,4999999999...$	-10^{-10}	$0,5000000000...$

De functie $f(x)$ is wel gedefinieerd voor $x \neq 0$ maar niet in 0 zelf.

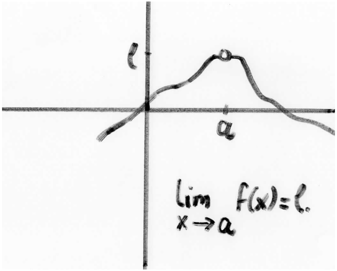
Het bovenstaande suggereert dat $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$ nadert wanneer x steeds dichter naar 0 nadert zonder 0 te bereiken (zowel van rechts of van links).

'Definitie' van een limiet

We bekijken de situatie van de vorige dia algemener.

Laat $f(x)$ een functie zijn die gedefinieerd is voor alle x dichtbij a, maar niet noodzakelijk in $x = a$ zelf (mag wel, hoeft niet).

We zeggen dat de **limiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van rechts of van links steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



'Definitie' van een limiet

We bekijken de situatie van de vorige dia algemener.

Laat $f(x)$ een functie zijn die gedefinieerd is voor alle x dichtbij a, maar niet noodzakelijk in $x = a$ zelf (mag wel, hoeft niet).

We zeggen dat de **limiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van rechts of van links steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

In het voorbeeld waarmee we begonnen is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

(we hebben dit met een tabelletje aannemelijk gemaakt, dit gaan we nog precies bewijzen).

'Definitie' van een limiet

We bekijken de situatie van de vorige dia algemener.

Laat $f(x)$ een functie zijn die gedefinieerd is voor alle x dichtbij a, maar niet noodzakelijk in $x = a$ zelf (mag wel, hoeft niet).

We zeggen dat de **limiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van rechts of van links steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Deze 'definitie' geeft een idee wat een limiet is, maar hij is niet wiskundig precies.

Voor de nogal ingewikkelde precieze definitie verwijzen we naar het boek.

'Definitie' van een limiet

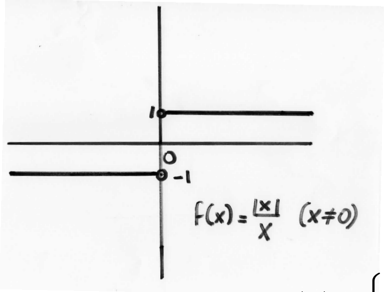
We bekijken de situatie van de vorige dia algemener.

Laat $f(x)$ een functie zijn die gedefinieerd is voor alle x dichtbij a, maar niet noodzakelijk in $x = a$ zelf (mag wel, hoeft niet).

We zeggen dat de **limiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van rechts of van links steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Limieten hoeven niet te bestaan. We zullen hiervan enkele voorbeelden geven.

Voorbeeld



De absolute waarde van x is gedefinieerd door $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0. \end{cases}$.

Definieer nu de functie

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ -1 & \text{als } x < 0. \end{cases}.$$

Als we x van rechts naar 0 laten naderen dan is $f(x) = 1$. Als we x van links laten naderen dan is $f(x) = -1$. De eis voor het bestaan van $\lim_{x \to 0} f(x)$ is dat zowel wanneer x van rechts naar 0 nadert als wanneer x van links naar 0 nadert, $f(x)$ naar de zelfde waarde ℓ moet naderen. Dat is hier niet het geval. Dus de limiet bestaat niet.

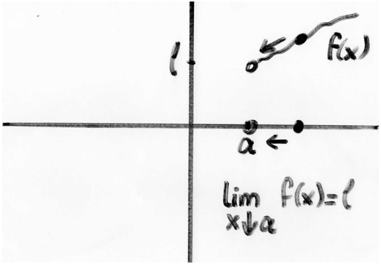
Definitie van de rechterlimiet

In het voorbeeld op de vorige dia nadert $f(x)$ naar 1 als x van rechts naar 0 nadert en naar -1 als x van links naar 0 nadert. Dit suggereert de definities van rechter- en linkerlimiet.

Definitie van de rechterlimiet

Laat $f(x)$ een functie zijn die is gedefinieerd voor alle $x > a$ die dichtbij a liggen.

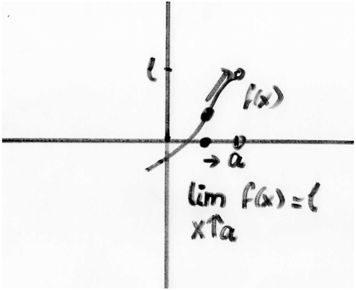
We zeggen dat de **rechterlimiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van rechts steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell$ (in het boek $\lim_{x \to a+} f(x) = \ell$).



Definitie van de linkerlimiet

Laat $f(x)$ een functie zijn die is gedefinieerd voor alle $x < a$ die dichtbij a liggen.

We zeggen dat de **linkerlimiet** van $f(x)$ voor x gaat naar a bestaat en gelijk is aan ℓ als het volgende geldt: wanneer x van links steeds dichter naar a nadert zonder noodzakelijk a zelf te bereiken, dan nadert $f(x)$ naar ℓ.
We schrijven $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \ell$ (in het boek $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \ell$).



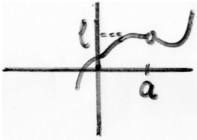
Verband tussen limiet, linker- en rechterlimiet

Lat $f(x)$ een functie zijn die is gedefinieerd voor alle x dichtbij a maar niet noodzakelijk in a zelf. Dan geldt:

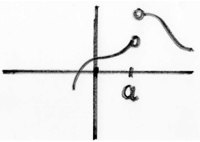
de limiet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat en is gelijk aan ℓ

$\Longleftrightarrow$

de rechterlimiet $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ en linkerlimiet $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ bestaan en zijn beide gelijk aan ℓ.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat niet want

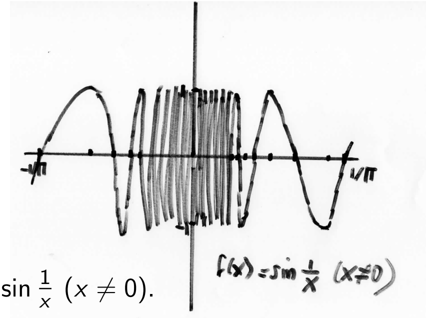
$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \neq \lim_{x \uparrow a} f(x)$$

Nog een voorbeeld

De limiet $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat niet als de rechterlimiet $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ en linkerlimiet $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ bestaan maar verschillend van elkaar zijn.

Maar het kan ook al voorkomen dat de rechter- en/of linkerlimiet niet bestaan. Dan bestaat de limiet zeker niet.

Nog een voorbeeld



Definieer $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

$\sin x = 0$ voor $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, dus $f(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots$,
$\sin x = 1$ voor $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \ldots$, dus $f(x) = 1$ voor $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots$,
$\sin x = -1$ voor $x = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \ldots$, dus $f(x) = -1$ voor $x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots$.
Hoe dicht we ook x van rechts naar 0 laten naderen, $f(x)$ blijft op en neer gaan tussen -1 en 1 dus $f(x)$ nadert niet naar een limietwaarde. Met andere woorden, $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ bestaat niet.

Op dezelfde manier kun je laten zien dat $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ ook niet bestaat.

Deel 2: Berekenen van limieten

Rekenregels

Als $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ dan geldt:

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell + m, \quad \lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \ell - m,$$
$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \ell \cdot m, \quad \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \ell/m \text{ mits } m \neq 0,$$
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ell^m \text{ mits } \ell^m \text{ is gedefinieerd.}$$

Verder geldt de samenstellingsregel:
als $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to \ell} g(x) = m$, dan $\lim_{x\to a} g(f(x)) = m$.

$g(f(x))$ betekent dat we in de definitie van $g(x)$, x vervangen door $f(x)$.
Als bijvoorbeeld $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ dan is $g(f(x)) = \sqrt{x^4+1}$.

Dezelfde regels gelden voor linker- en rechterlimieten.

Invulregels

Voor veel functies f (zogenaamde continue functies, worden later behandeld) kunnen we $\lim_{x \to a} f(x)$ uitrekenen simpelweg door $x = a$ in $f(x)$ in te vullen.

Voorbeelden.

- Als $f(x) = c$ (constante functie) dan geldt $\lim_{x \to a} f(x) = c$.
  Namelijk als x naar a nadert (van rechts of van links) dan blijft $f(x)$ gelijk aan c.
- $\lim_{x \to a} x = a$ (als x nadert naar a dan nadert x naar a).
- Verder geldt nog: als $f(x) = \text{polynoom}, x^\alpha, \sin x, \cos x, e^x, \ln x$ en $f(x)$ is gedefinieerd op $x = a$ en een interval daaromheen, dan is $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dezelfde regels gelden voor linker- en rechterlimieten.

Combinatie van alle rekenregels

Laat $f(x)$ een functie zijn die is opgebouwd uit constante functies, x^α, $\sin x$, $\cos x$ e^x, $\ln x$ en het herhaaldelijk toepassen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en samenstellen (ene functie invullen in de andere). Een functie van dit type noemen we wel een **standaardfunctie**.

Voor een dergelijke functie geldt ook de invulregel:
Neem aan dat $f(x)$ is gedefinieerd in $x = a$ en een interval daaromheen.

Dan is $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Combinatie van alle rekenregels

Laat $f(x)$ een functie zijn die is opgebouwd uit constante functies, x^α, $\sin x$, $\cos x$ e^x, $\ln x$ en het herhaaldelijk toepassen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en samenstellen (ene functie invullen in de andere). Een functie van dit type noemen we wel een **standaardfunctie**.

Voor een dergelijke functie geldt ook de invulregel:
Neem aan dat $f(x)$ is gedefinieerd in $x = a$ en een interval daaromheen.

Dan is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Voorbeeld. Bereken $\lim\limits_{x \to 4} \ln \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Dit is een standaardfunctie die gedefinieerd is in $x = 4$ en een interval daaromheen. Dus om de limiet uit te rekenen kun je gewoon $x = 4$ invullen.
Als we $x = 4$ invullen in $\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ krijgen we 1. Er geldt $\ln 1 = 0$. dus $\lim\limits_{x \to 4} \ln \dfrac{\sqrt{x}}{x-2} = 0$.

Deel 3: 0/0-limieten

0/0-limieten

We komen vaak limieten tegen van de vorm $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ waarbij $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, zogenaamde $\frac{0}{0}$-limieten.

Je kan niet zomaar zeggen dat een dergelijke limiet niet is gedefinieerd. Vaak kunnen we zo'n limiet omwerken tot iets waarvan de noemer niet meer naar 0 gaat als we x naar a laten gaan. Dan kunnen we de limiet alsnog uitrekenen.

$\frac{0}{0}$-limieten zijn essentieel in de differentiaalrekening (later).

Verderop in het college zullen we de regel van L'Hôpital behandelen waarmee je $\frac{0}{0}$-limieten uit kan rekenen.

Nu mogen we die nog niet gebruiken, we behandelen enkele andere methoden die soms werken.

Uitdelen van een factor

Voorbeeld. Bekijk $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$.

Zowel de teller als de noemer nemen de waarde 0 aan als we $x = 3$ invullen. Dit is dus een $\frac{0}{0}$-limiet.

Uitdelen van een factor

Voorbeeld. Bekijk $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$.

Zowel de teller als de noemer nemen de waarde 0 aan als we $x = 3$ invullen. Dit is dus een $\frac{0}{0}$-limiet.

Uit het eerste college weten we dat een polynoom waarvan $x = a$ een nulpunt is deelbaar is door $x - a$. Dus $x^3 - 27$ en $x^2 - 9$ zijn beide deelbaar door $x - 3$.

Uitdelen van een factor

Voorbeeld. Bekijk $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$.

Zowel de teller als de noemer nemen de waarde 0 aan als we $x = 3$ invullen. Dit is dus een $\frac{0}{0}$-limiet.

Uit het eerste college weten we dat een polynoom waarvan $x = a$ een nulpunt is deelbaar is door $x - a$. Dus $x^3 - 27$ en $x^2 - 9$ zijn beide deelbaar door $x - 3$.

Het is makkelijk na te gaan dat $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Verder geldt

$$
\begin{array}{rll}
x - 3\,/ & x^3 - 27 & \backslash\; x^2 + 3x + 9 \\
 & x^3 - 3x^2 \quad - & \\
\hline
 & 3x^2 - 27 & \\
 & 3x^2 - 9x \quad - & \\
\hline
 & 9x - 27 & \\
 & 9x - 27 \quad - & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Dus $x^3 - 27 = (x^2 + 3x + 9)(x - 3)$.

Uitdelen van een factor (vervolg)

We hebben gezien dat $x^3 - 27 = (x^2 + 3x + 9)(x - 3)$, $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Dus

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

In de tweede stap hebben we teller en noemer door $x - 3$ gedeeld. Dit mag natuurlijk alleen zolang $x - 3 \neq 0$.

Maar bij het nemen van de limiet laten we x naar 3 **naderen**, x wordt **niet gelijk** aan 3 dus $x - 3$ wordt niet gelijk aan 0. Dus delen door $x - 3$ is toegestaan.

In de laatste stap kunnen we $x = 3$ invullen omdat dan de noemer ongelijk aan 0 is.

Uitdelen van een factor (vervolg)

We hebben gezien dat $x^3 - 27 = (x^2 + 3x + 9)(x - 3)$,
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Dus

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Opmerking! Bij iedere stap in de berekening van de limiet moet je $\lim\limits_{x \to 3}$ er voor zetten.

Bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$ is **fout**, want $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ is een **getal** maar $\dfrac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$ is een **functie**.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x + 2}$.

Zowel de teller als de noemer nemen de waarde 0 aan als we $x = -1$ invullen. Dit is dus een $\frac{0}{0}$-limiet.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x + 2}$.

Zowel de teller als de noemer nemen de waarde 0 aan als we $x = -1$ invullen. Dit is dus een $\frac{0}{0}$-limiet.

Er geldt $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, $x^3 + x + 2 = (x^2 - x + 2)(x + 1)$ (ga na). Dus

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x^2 - x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 4}{x^2 - x + 2} = -\frac{5}{4}.$$

We mogen de teller en noemer weer door $x + 1$ delen omdat x naar -1 nadert maar niet gelijk wordt aan -1.

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.
Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}$.

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.
Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}$.

Voorbeeld. Bereken de limiet uit het begin, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$. Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$.

Voorbeeld. Bereken de limiet uit het begin, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{1+x} + 1$. Dit geeft

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)}$$

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.
Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}$.

Voorbeeld. Bereken de limiet uit het begin, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{1+x} + 1$. Dit geeft

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)}$$

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.
Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\ldots} - \sqrt{\ldots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots}}$.

Voorbeeld. Bereken de limiet uit het begin, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{1+x} + 1$. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)}
\end{aligned}$$

De worteltruc

In het algemeen geldt: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.
Als we $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ nemen dan is $a^2 = x$, $b^2 = y$ en dus

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y.$$

We kunnen dit gebruiken om limieten te berekenen: als er in een limiet een uitdrukking staat met $\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}$, vermenigvuldig die dan met $\dfrac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$.

Voorbeeld. Bereken de limiet uit het begin, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{1+x} + 1$. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

We mogen teller en noemer delen door x omdat x wel naar 0 nadert maar niet gelijk wordt aan 0.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^5}{\sqrt{1+2x^4} - \sqrt{1+x^4}}$.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5}{\sqrt{1+2x^4} - \sqrt{1+x^4}}$.

We vermenigvuldigen teller en noemer met $\sqrt{1+2x^4} + \sqrt{1+x^4}$. Dan volgt

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{\sqrt{1+2x^4} - \sqrt{1+x^4}} \\ &\quad = \lim_{x \to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4} + \sqrt{1+x^4})}{(\sqrt{1+2x^4} - \sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+2x^4} + \sqrt{1+x^4})} \end{aligned}$$

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}}$.

We vermenigvuldigen teller en noemer met $\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4}$. Dan volgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{(\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{1+2x^4-(1+x^4)}
\end{aligned}$$

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}}$.

We vermenigvuldigen teller en noemer met $\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4}$. Dan volgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{(\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{1+2x^4-(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{x^4}
\end{aligned}$$

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}}$.

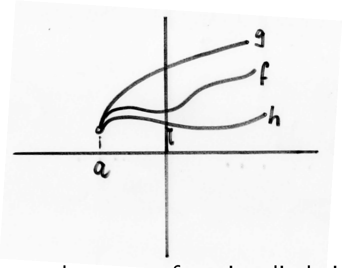
We vermenigvuldigen teller en noemer met $\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4}$. Dan volgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4}} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{(\sqrt{1+2x^4}-\sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{1+2x^4-(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4})}{x^4} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} x(\sqrt{1+2x^4}+\sqrt{1+x^4}) = 0.
\end{aligned}$$

We mogen teller en noemer door x^4 delen omdat x wel nadert maar niet gelijk wordt aan 0.

De uitdrukking in de laatste limiet nadert naar 0 als x naar 0 nadert.

De insluitingsstelling



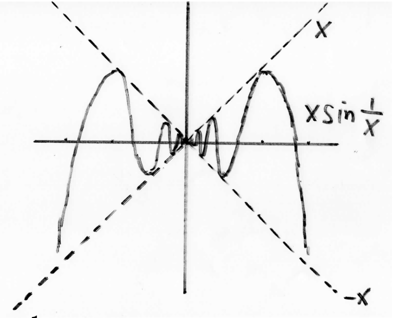
Als $f(x)$ wordt ingesloten door twee functies die beide rechterlimiet ℓ hebben als x van rechts naar a nadert, dan heeft $f(x)$ ook rechterlimiet ℓ.

Zijn $f(x), g(x), h(x)$ drie functies met $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ voor $x > a$ en $\lim_{x \downarrow a} g(x) = \lim_{x \downarrow a} h(x) = \ell$. Dan is $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \ell$.

Iets dergelijks geld voor linkerlimieten.

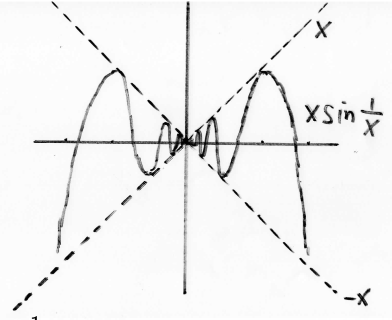
Zijn $f(x), g(x), h(x)$ drie functies met $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ voor $x < a$ en $\lim_{x \uparrow a} g(x) = \lim_{x \uparrow a} h(x) = \ell$. Dan is $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \ell$.

Voorbeeld



We bepalen $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$. We bepalen eerst de rechterlimiet en daarna de linkerlimiet.

Voorbeeld

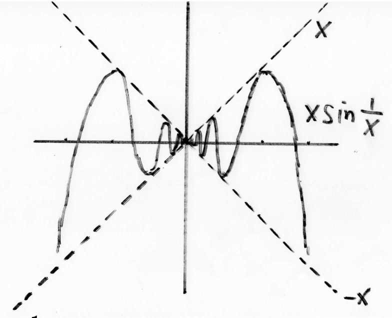


We bepalen $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$. We bepalen eerst de rechterlimiet en daarna de linkerlimiet.

Rechterlimiet. Omdat de waarden van sinus tussen -1 en 1 liggen geldt $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$. Verder is $\lim_{x\downarrow 0} x = \lim_{x\downarrow 0} -x = 0$.

Dus wegens de insluitingsstelling $\lim_{x\downarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Voorbeeld

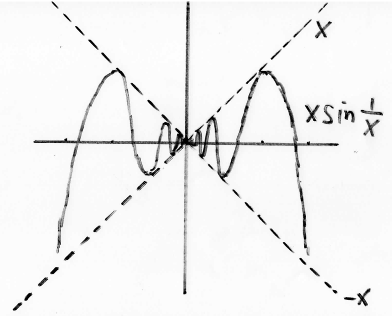


We bepalen $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$. We bepalen eerst de rechterlimiet en daarna de linkerlimiet.

Linkerlimiet. Omdat de waarden van sinus tussen -1 en 1 liggen, geldt $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$. Verder is $\lim_{x\uparrow 0} x = \lim_{x\uparrow 0} -x = 0$.

Dus wegens de insluitingsstelling $\lim_{x\uparrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Voorbeeld



We bepalen $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$. We bepalen eerst de rechterlimiet en daarna de linkerlimiet.

Linkerlimiet. Omdat de waarden van sinus tussen -1 en 1 liggen, geldt $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$. Verder is $\lim_{x \uparrow 0} x = \lim_{x \uparrow 0} -x = 0$.

Dus wegens de insluitingsstelling $\lim_{x \uparrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Omdat ook $\lim_{x \downarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ volgt dat $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Einde van het college