CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

5e college: Limieten (vervolg), asymptoten

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Limieten voor $x \to \infty$ of $x \to -\infty$.

Limieten voor $x \to \pm\infty$

We schrijven $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ als het volgende geldt: wanneer we x naar ∞ laten gaan (dat wil zeggen boven iedere grens uitstijgt) dan nadert $f(x)$ naar ℓ.

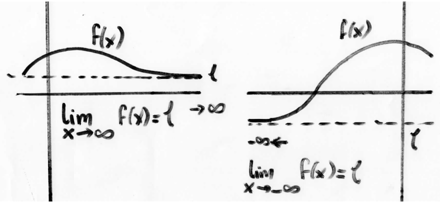
We schrijven $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ als het volgende geldt: wanneer we x naar $-\infty$ laten gaan (dat wil zeggen onder iedere grens daalt) dan nadert $f(x)$ naar ℓ.

Limieten voor $x \to \pm\infty$

We schrijven $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ als het volgende geldt: wanneer we x naar ∞ laten gaan (dat wil zeggen boven iedere grens uitstijgt) dan nadert $f(x)$ naar ℓ.

We schrijven $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ als het volgende geldt: wanneer we x naar $-\infty$ laten gaan (dat wil zeggen onder iedere grens daalt) dan nadert $f(x)$ naar ℓ.

Als $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ dan heeft $f(x)$ een **horizontale asymptoot** $y = \ell$ voor $x \to \infty$, dat wil zeggen, de grafiek van $f(x)$ nadert de lijn $y = \ell$ steeds dichter als x naar ∞ gaat.
Als $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ dan heeft $f(x)$ een horizontale asymptoot $y = \ell$ voor $x \to -\infty$.



Limieten voor $x \to \pm\infty$ (vervolg)

Het is duidelijk dat

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \;\text{ als } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0 \;\text{ als } a > 1, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{x} = 0 \;\text{ als } a < 1.$$

We kunnen dit gebruiken om ingewikkelder limieten uit te rekenen.

Limieten voor $x \to \pm\infty$ (vervolg)

Het is duidelijk dat

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{als } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0 \quad \text{als } a > 1, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{x} = 0 \quad \text{als } a < 1.$$

We kunnen dit gebruiken om ingewikkelder limieten uit te rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+7}{7x^2-12x}$.

Limieten voor $x \to \pm\infty$ (vervolg)

Het is duidelijk dat

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{als } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0 \quad \text{als } a > 1, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{x} = 0 \quad \text{als } a < 1.$$

We kunnen dit gebruiken om ingewikkelder limieten uit te rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+7}{7x^2-12x}$.

De truc is om teller en noemer te delen door de snelst groeiende term van de noemer, waarbij we niet op constanten letten.

In het voorbeeld is de snelst groeiende term in de noemer x^2, deze groeit sneller dan x (de constante 7 is niet belangrijk). Dus we delen teller en noemer door x^2:

Limieten voor $x \to \pm\infty$ (vervolg)

Het is duidelijk dat

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0 \quad \text{als } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0 \quad \text{als } a > 1, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{x} = 0 \quad \text{als } a < 1.$$

We kunnen dit gebruiken om ingewikkelder limieten uit te rekenen.

Voorbeeld. Bereken $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+7}{7x^2-12x}$.

De truc is om teller en noemer te delen door de snelst groeiende term van de noemer, waarbij we niet op constanten letten.

In het voorbeeld is de snelst groeiende term in de noemer x^2, deze groeit sneller dan x (de constante 7 is niet belangrijk). Dus we delen teller en noemer door x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+7}{7x^2-12x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+7x^{-2}}{7-12x\cdot x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+7x^{-2}}{7-12x^{-1}} = \frac{3}{7},$$

want x^{-2} en x^{-1} gaan naar 0 als x naar oneindig gaat.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9}$.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9}$.

We delen teller en noemer weer door de snelst groeiende term van de noemer, dat is 4^x.

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9}$.

We delen teller en noemer weer door de snelst groeiende term van de noemer, dat is 4^x. Dit geeft

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \cdot 4^{-x} + 2^x \cdot 4^{-x} + 5 \cdot 4^{-x}}{1 + 9 \cdot 4^{-x}}$$

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9}$.

We delen teller en noemer weer door de snelst groeiende term van de noemer, dat is 4^x. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9} &= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \cdot 4^{-x} + 2^x \cdot 4^{-x} + 5 \cdot 4^{-x}}{1 + 9 \cdot 4^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3/4)^x + (2/4)^x + 5 \cdot 4^{-x}}{1 + 9 \cdot 4^{-x}}
\end{aligned}$$

Nog een voorbeeld

Bereken $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9}$.

We delen teller en noemer weer door de snelst groeiende term van de noemer, dat is 4^x. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3^x + 2^x + 5}{4^x + 9} &= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \cdot 4^{-x} + 2^x \cdot 4^{-x} + 5 \cdot 4^{-x}}{1 + 9 \cdot 4^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3/4)^x + (2/4)^x + 5 \cdot 4^{-x}}{1 + 9 \cdot 4^{-x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

want $(3/4)^x$, $(2/4)^x = (1/2)^x$ en 4^{-x} gaan naar 0 als x naar ∞ gaat.

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

We mogen **niet** schrijven $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+x^2} - \lim_{x\to\infty} x$.

Namelijk de eerste limiet gaat naar ∞, de tweede limiet gaat naar ∞ en het verschil is $\infty - \infty$ wat niet is gedefinieerd.

We moeten dus $\sqrt{1+x^2}$ en x bij elkaar houden.

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.

We gebruiken weer de **worteltruc**.
In de limiet staat iets van de vorm $\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}$, als we x als $\sqrt{x^2}$ opvatten.

We vermenigvuldigen dit weer met $\dfrac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$ en gebruiken dat

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

We gebruiken weer de **worteltruc**.
In de limiet staat iets van de vorm $\sqrt{\dots}-\sqrt{\dots}$, als we x als $\sqrt{x^2}$ opvatten.

We vermenigvuldigen dit weer met $\dfrac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}$ en gebruiken dat $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

We gebruiken weer de **worteltruc**.
In de limiet staat iets van de vorm $\sqrt{\ldots}-\sqrt{\ldots}$, als we x als $\sqrt{x^2}$ opvatten.

We vermenigvuldigen dit weer met $\dfrac{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}}$ en gebruiken dat $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\end{aligned}$$

Een ander soort limiet

Bereken $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

We gebruiken weer de **worteltruc**.
In de limiet staat iets van de vorm $\sqrt{\dots}-\sqrt{\dots}$, als we x als $\sqrt{x^2}$ opvatten.

We vermenigvuldigen dit weer met $\dfrac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}$ en gebruiken dat $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

want $\sqrt{1+x^2}$ en x gaan naar ∞ als x naar ∞ gaat.

Standaardlimieten

We noemen zonder bewijs:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0 \text{ als } b > 1$$

(exponentiële functies groeien veel harder dan machten van x).

Standaardlimieten

We noemen zonder bewijs:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0 \text{ als } b > 1$$

(exponentiële functies groeien veel harder dan machten van x).

Voorbeeld. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000000}}{1,0000001^x} = 0.$

Standaardlimieten

We noemen zonder bewijs:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{b^x} = 0 \text{ als } b > 1$$

(exponentiële functies groeien veel harder dan machten van x).

Voorbeeld. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1000000}}{1,0000001^x} = 0.$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^a}{x^c} = 0 \text{ als } c > 0$$

(machten van x groeien veel harder dan machten van $\ln x$).

Standaardlimieten

We noemen zonder bewijs:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0 \text{ als } b > 1$$

(exponentiële functies groeien veel harder dan machten van x).

Voorbeeld. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000000}}{1,0000001^x} = 0.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^c} = 0 \text{ als } c > 0$$

(machten van x groeien veel harder dan machten van $\ln x$).

Dit leiden we eenvoudig uit de eerste limiet af. Substitueer $y = \ln x$. Dan is $x = e^y$. Als x naar ∞ gaat dan gaat y ook naar ∞, dus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^c} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^a}{(e^y)^c} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^{cy}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^a}{(e^c)^y} = 0.$$

Nog een standaardlimiet

$\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x = 0$ als $a > 0$.

Nog een standaardlimiet

$\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x = 0$ als $a > 0$.

Merk op dat $\ln x$ naar $-\infty$ gaat als x naar 0 daalt.
Bijvoorbeeld $\ln e^{-1000} = -1000$, $\ln e^{-10^{100}} = -10^{100}, \ldots$

x^a daalt veel sneller naar 0 dan dat $\ln x$ naar $-\infty$ gaat, de macht van x 'slaat $\ln x$ plat.'

Nog een standaardlimiet

$\lim_{x\downarrow 0} x^a \ln x = 0$ als $a > 0$.

Merk op dat $\ln x$ naar $-\infty$ gaat als x naar 0 daalt.
Bijvoorbeeld $\ln e^{-1000} = -1000$, $\ln e^{-10^{100}} = -10^{100}, \ldots$

x^a daalt veel sneller naar 0 dan dat $\ln x$ naar $-\infty$ gaat, de macht van x 'slaat $\ln x$ plat.'

We leiden dit af uit de tweede limiet van de vorige dia. Substitueer $y = x^{-1}$. Dan gaat y naar ∞. Dus

$$\lim_{x\downarrow 0} x^a \ln x = \lim_{y\to\infty} y^{-a} \ln(y^{-1}) = \lim_{y\to\infty} -y^{-a} \ln y = -\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^a} = 0.$$

Voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x + x}{2\cdot 3^x - x^{10}}$.

Voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x + x}{2 \cdot 3^x - x^{10}}$.

We delen teller en noemer door de snelst groeiende term van de noemer, dat is 3^x, want 3^x groeit veel sneller dan x^{10}.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x + x}{2 \cdot 3^x - x^{10}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + x \cdot 3^{-x}}{2 - x^{10} 3^{-x}} = \frac{1}{2}$$

want $x \cdot 3^{-x} = x/3^x$ en $x^{10} 3^{-x} = x^{10}/3^x$ gaan naar 0 als x naar ∞ gaat.

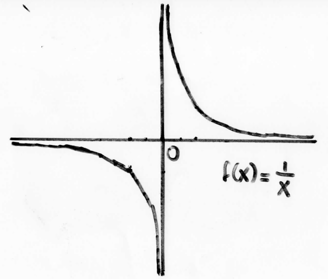
Deel 2: Verticale asymptoten

Limieten die naar $\pm\infty$ gaan

Bekijk $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Als we x van de positieve kant naar 0 laten dalen dan gaat $\dfrac{1}{x}$ naar $+\infty$, als we x van de negatieve kant naar 0 laten stijgen dan gaat $\dfrac{1}{x}$ naar $-\infty$, met andere woorden $\lim_{x\downarrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\uparrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

De grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ heeft een **verticale asymptoot** $x = 0$. Van de rechterkant gaat de grafiek langs de verticale asymptoot omhoog, van de linkerkant omlaag.



Verticale asymptoten

We bekijken functies $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Als $q(a) = 0$ en $p(a) \neq 0$ dan heeft $f(x)$ een verticale asymptoot in $x = a$.

We moeten voor elke verticale asymptoot $x = a$ van f nog nagaan of $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ gelijk is aan $+\infty$ of $-\infty$ en of $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ gelijk is aan $+\infty$ of $-\infty$.

Verticale asymptoten

We bekijken functies $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Als $q(a) = 0$ en $p(a) \neq 0$ dan heeft $f(x)$ een verticale asymptoot in $x = a$.

We moeten voor elke verticale asymptoot $x = a$ van f nog nagaan of $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ gelijk is aan $+\infty$ of $-\infty$ en of $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ gelijk is aan $+\infty$ of $-\infty$.

Als $f(x) > 0$ direct rechts van de lijn $x = a$ dan is $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$,
als $f(x) < 0$ direct rechts van de lijn $x = a$ dan is $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$.

Als $f(x) > 0$ direct links van de lijn $x = a$ dan is $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$,
als $f(x) < 0$ direct links van de lijn $x = a$ dan is $\lim_{x \uparrow a} f(x) = -\infty$.

Om dit te bepalen is het handig een **tekenoverzicht** van $f(x)$ te maken, dat is een schema waarin is aangegeven voor welke x geldt dat $f(x) > 0$ en voor welke x geldt dat $f(x) < 0$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$.

De noemer van $f(x)$ is 0 voor $x = 1$ en $x = -1$ en daar is de teller van $f(x)$ ongelijk aan 0.

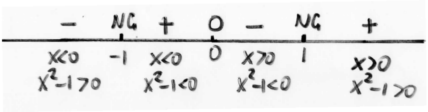
Dus $x = 1$, $x = -1$ zijn de verticale asymptoten van $f(x)$.

Voorbeeld

Bekijk $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$.

De noemer van $f(x)$ is 0 voor $x = 1$ en $x = -1$ en daar is de teller van $f(x)$ ongelijk aan 0.

Dus $x = 1$, $x = -1$ zijn de verticale asymptoten van $f(x)$.



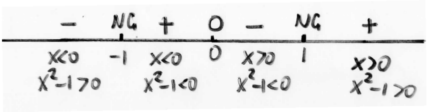
Tekenoverzicht van $f(x)$
(NG betekent dat $f(x)$ niet gedefinieerd is voor die waarde van x)

Voorbeeld

Bekijk $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$.

De noemer van $f(x)$ is 0 voor $x = 1$ en $x = -1$ en daar is de teller van $f(x)$ ongelijk aan 0.

Dus $x = 1$, $x = -1$ zijn de verticale asymptoten van $f(x)$.

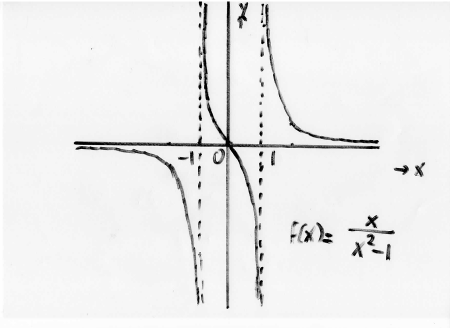


Tekenoverzicht van $f(x)$
(NG betekent dat $f(x)$ niet gedefinieerd is voor die waarde van x)

Uit het tekenoverzicht valt af te lezen dat

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\uparrow -1} f(x) = -\infty$$

Voorbeeld (vervolg)



Hierboven is de grafiek van $f(x)$ getekend. Hierin zijn de verticale asymptoten $x = 1$ en $x = -1$ aangegeven.

Verder heeft $f(x)$ de horizontale asymptoot $y = 0$ voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$, want

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot x^{-2}}{1 - x^{-2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{-1}}{1 - x^{-2}} = 0.$$

We hebben teller en noemer door x^2 gedeeld omdat dat de snelst groeiende term van de noemer is.

Einde van het college