CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

6e college: Continue functies

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Definities

Continuïteit

Het idee van continuïteit is als volgt: een functie f is continu in $x = a$ als de grafiek van f netjes doorloopt in $x = a$, dat wil zeggen geen gat heeft in $x = a$.

Wanneer de grafiek van f wel een gat heeft in $x = a$ zeggen we dat f discontinu is in $x = a$ of dat $x = a$ een discontinuïteit is van f.

Continuïteit

Het idee van continuïteit is als volgt: een functie f is continu in $x = a$ als de grafiek van f netjes doorloopt in $x = a$, dat wil zeggen geen gat heeft in $x = a$.

Wanneer de grafiek van f wel een gat heeft in $x = a$ zeggen we dat f discontinu is in $x = a$ of dat $x = a$ een discontinuïteit is van f.

De precieze definitie is als volgt:

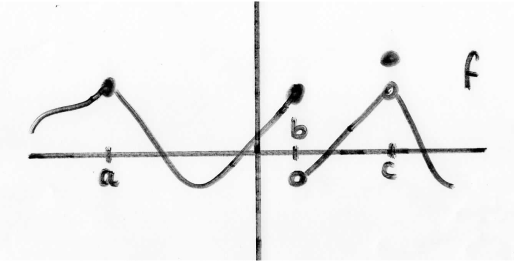
Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een functie en $a \in D$. We zeggen dat f **continu** is in $x = a$ als $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(a)$.

We zeggen dat f **discontinu** is in $x = a$ of dat $x = a$ een **discontinuïteit** is van f als of $\lim_{x \to a} f(x)$ niet bestaat, of als die limiet wel bestaat maar niet gelijk is aan $f(a)$.

In het geval dat $\lim_{x \to a} f(x)$ wel bestaat maar niet gelijk is aan $f(a)$ noemen we $x = a$ een **ophefbare discontinuïteit** van f.

We kunnen in dit geval f continu maken in $x = a$ (de discontinuïteit opheffen) door de waarde van f in $x = a$ te veranderen en gelijk te maken aan de uitkomst van de limiet $\lim_{x \to a} f(x)$.

Continuïteit



De functie f is continu in $x = a$ want $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat en is gelijk aan $f(a)$ (geen gat in de grafiek).

$x = b$ is een (niet ophefbare) discontinuïteit van f want $\lim_{x \to b} f(x)$ bestaat niet.

$x = c$ is een ophefbare discontinuïteit van f want $\lim_{x \to c} f(x)$ bestaat wel maar is niet gelijk aan $f(c)$.
We kunnen f continu maken in $x = c$ door $f(c)$ te veranderen en gelijk te maken aan $\lim_{x \to c} f(x)$ (we kunnen het gaatje opvullen).

Links-continuïteit en rechts-continuïteit

De functie f is rechts-continu in $x = a$ als $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(a)$.

De functie f is links-continu in $x = a$ als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(a)$.

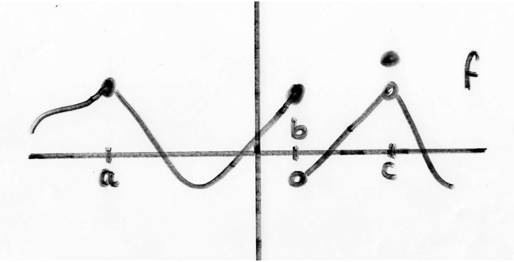
Links-continuïteit en rechts-continuïteit

De functie f is rechts-continu in $x = a$ als $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(a)$.
De functie f is links-continu in $x = a$ als $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(a)$.

Uit de definities volgt:

$$
\begin{aligned}
f \text{ is continu in } x = a &\iff f \text{ is zowel links- als rechts-continu in } x = a \\
&\iff \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a) \text{ en } \lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a).
\end{aligned}
$$

Links-continuïteit en rechts-continuïteit



De functie f is links-continu en rechts-continu, en dus continu in $x = a$, want $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a)$.

f is links-continu in $x = b$ want $\lim_{x \uparrow b} f(x) = f(b)$; f is niet rechts-continu in $x = b$ want $\lim_{x \downarrow b} f(x) \neq f(b)$.

f is noch links-continu, noch rechts-continu in $x = c$ want $\lim_{x \uparrow c} f(x) \neq f(b)$, $\lim_{x \downarrow c} f(x) \neq f(c)$.

Continuïteit in randpunten

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$.

We noemen a een linker randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x < a$ en x in de buurt van a.

We noemen a een rechter randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x > a$ en x in de buurt van a.

Continuïteit in randpunten

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$.

We noemen a een linker randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x < a$ en x in de buurt van a.

We noemen a een rechter randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x > a$ en x in de buurt van a.

Als a een linker randpunt van D is dan zeggen we dat f continu is in $x = a$ wanneer f rechts-continu is in $x = a$, d.w.z. als $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$.

De reden hiervan is dat we nu niet over links-continuïteit kunnen spreken omdat $f(x)$ niet gedefinieerd is voor $x < a$.

Continuïteit in randpunten

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$.

We noemen a een linker randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x < a$ en x in de buurt van a.

We noemen a een rechter randpunt van D als D geen getallen x bevat met $x > a$ en x in de buurt van a.

Als a een linker randpunt van D is dan zeggen we dat f continu is in $x = a$ wanneer f rechts-continu is in $x = a$, d.w.z. als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$.

De reden hiervan is dat we nu niet over links-continuïteit kunnen spreken omdat $f(x)$ niet gedefinieerd is voor $x < a$.

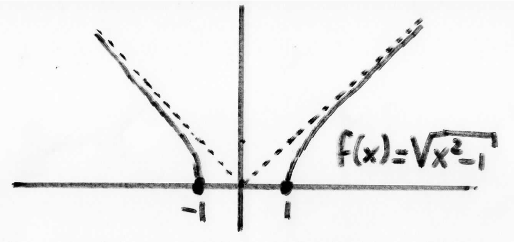
Als a een rechter randpunt van D is dan zeggen we dat f continu is in $x = a$ wanneer f links-continu is in $x = a$, d.w.z. als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a)$.

Voorbeeld

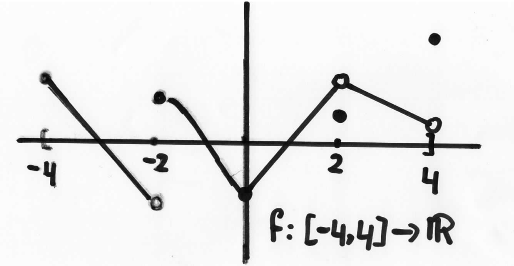
Laat $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Het domein van f is de verzameling van alle x met $x^2 - 1 \geq 0$, dat is $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

1 is een linker randpunt van D want D bevat geen getallen $x < 1$ in de buurt van 1.
De functie f is rechts-continu in $x = 1$. We zeggen dat f continu is in $x = 1$ omdat we niet op een zinvolle manier kunnen spreken over links-continuïteit.

Evenzo is -1 een rechter randpunt van D omdat D geen getallen $x > -1$ bevat in de buurt van -1, en zeggen we dat f continu is in $x = -1$.



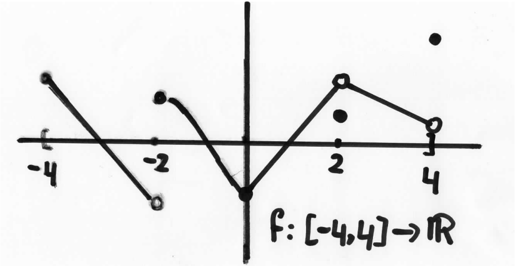
Opgave met een plaatje



Hierboven is de grafiek getekend van een functie f met domein $[-4, 4]$.

Geef voor $x = -4, -2, 0, 2, 4$ aan of f daar links-continu, rechts-continu, continu is en of de discontinuïteit ophefbaar is.

Opgave met een plaatje

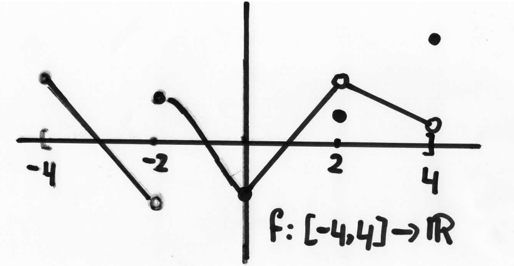


$x = -4$

f is rechts-continu in $x = -4$ want $\lim_{x \downarrow -4} f(x) = f(-4)$.

Omdat -4 een linker randpunt is van $[-4, 4]$ is f continu in $x = -4$.

Opgave met een plaatje



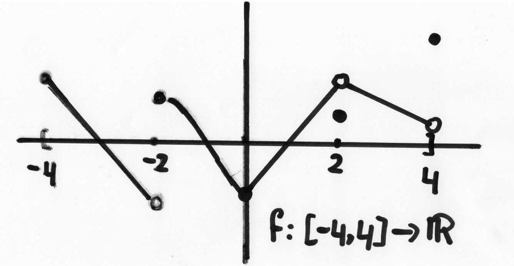
$x = -2$

f is niet links-continu in $x = -2$ omdat $\lim\limits_{x \uparrow -2} f(x) \neq f(-2)$.

f is wel rechts-continu in $x = -2$ omdat $\lim\limits_{x \downarrow -2} f(x) = f(-2)$.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ bestaat niet, dus de discontinuïteit is niet ophefbaar.

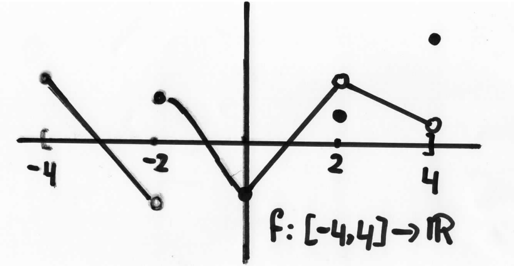
Opgave met een plaatje



$x = 0$

$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0)$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0)$.
Dus f is links-continu, rechts-continu en continu in $x = 0$.

Opgave met een plaatje

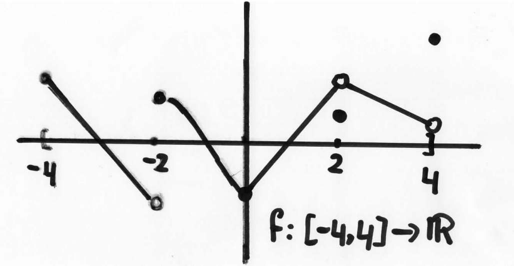


$x = 2$

f is niet links-continu en niet rechts-continu in $x = 2$ omdat $\lim_{x \uparrow 2} f(x) \neq f(2)$, $\lim_{x \downarrow 2} f(x) \neq 2$.

De linker- en rechterlimiet zijn wel gelijk, dus $\lim_{x \to 2} f(x)$ bestaat. We kunnen f continu maken in $x = 2$ door de functiewaarde $f(2)$ gelijk te maken aan $\lim_{x \to 2} f(x)$. De discontinuïteit in $x = 2$ is dus ophefbaar.

Opgave met een plaatje

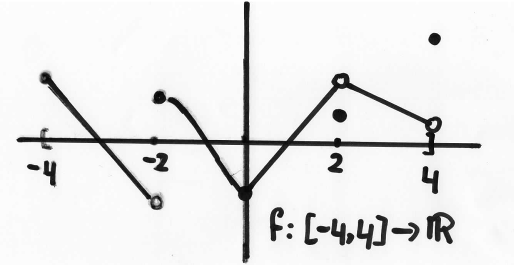


$x = 4$

f is niet links-continu in $x = 4$ omdat $\lim_{x \uparrow 4} f(x) \neq f(4)$.

Maar we kunnen f wel links-continu maken door de functiewaarde $f(4)$ gelijk te maken aan $\lim_{x \uparrow 4} f(x)$. Omdat 4 een rechter randpunt is van D maken we f op die manier continu in $x = 4$. De discontinuïteit in $x = 4$ is dus ophefbaar.

Voorbeeld met een plaatje



- $x = -4$: rechts-continu, continu
- $x = -2$: niet links-continu, wel rechts-continu, geen ophefbare discontinuïteit
- $x = 0$: links-continu, rechts-continu, continu
- $x = 2$: niet links-continu, niet rechts-continu, discontinuïteit wel ophefbaar
- $x = 4$: niet links-continu, discontinuïteit wel ophefbaar

Deel 2: Rekenvoorbeelden

Continuïteit van standaardfuncties

Een **standaardfunctie** is een functie die is opgebouwd uit constante functies, x^α, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ en het herhaaldelijk toepassen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en samenstellen (ene functie invullen in de andere).

Ruwweg gezegd wordt een standaardfunctie gegeven door een formule waarin uitdrukkingen tot de macht α, sin, cos, ln en e-macht voor kunnen komen.

Belangrijk feit (zonder bewijs)

Een standaardfunctie is continu overal waar hij is gedefinieerd.

Voorbeeld. $f(x) = e^{\sqrt[3]{\ln(1-\sin x)}+87\sqrt{(1-x)(2-x)}}$ is een standaardfunctie. Hij is continu overal waar hij is gedefinieerd.

Continuïteit van standaardfuncties

Een **standaardfunctie** is een functie die is opgebouwd uit constante functies, x^α, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ en het herhaaldelijk toepassen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en samenstellen (ene functie invullen in de andere).

Ruwweg gezegd wordt een standaardfunctie gegeven door een formule waarin uitdrukkingen tot de macht α, sin, cos, ln en e-macht voor kunnen komen.

Belangrijk feit (zonder bewijs)

Een standaardfunctie is continu overal waar hij is gedefinieerd.

Voorbeeld. $f(x) = e^{\sqrt[3]{\ln(1-\sin x)}+87\sqrt{(1-x)(2-x)}}$ is een standaardfunctie. Hij is continu overal waar hij is gedefinieerd.

Standaardfuncties zijn ruwweg gesproken functies die op hun hele domein zijn gegeven door dezelfde formule.

We gaan functies f bekijken die op verschillende stukken van hun domein zijn gedefinieerd door verschillende formules en onderzoeken of die continu zijn.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + \ln(x^8 + 1) & \text{voor } x > 0, \\ \sqrt{x^2 + 4} & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

Ga na of links-continu, rechts-continu, continu is in $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + \ln(x^8 + 1) & \text{voor } x > 0, \\ \sqrt{x^2 + 4} & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

Ga na of links-continu, rechts-continu, continu is in $x = 0$.

Er geldt $f(0) = \sqrt{0^2 + 4} = 2$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + \ln(x^8 + 1) & \text{voor } x > 0, \\ \sqrt{x^2 + 4} & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

Ga na of links-continu, rechts-continu, continu is in $x = 0$.

Er geldt $f(0) = \sqrt{0^2 + 4} = 2$.

Er geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = 2 = f(0)$.
Dus f is links-continu in $x = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x + \ln(x^8+1) & \text{voor } x > 0, \\ \sqrt{x^2+4} & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

Ga na of links-continu, rechts-continu, continu is in $x = 0$.

Er geldt $f(0) = \sqrt{0^2+4} = 2$.

Er geldt $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} \sqrt{x^2+4} = 2 = f(0)$.
Dus f is links-continu in $x = 0$.

Er geldt
$\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} 2\cos x + \ln(x^8+1) = 2\cos 0 + \ln 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2 = f(0)$.
Dus f is rechts-continu in $x = 0$.

Dus f is continu in $x = 0$.

Functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_c(x) = \begin{cases} 2x^2 + c & \text{voor } x > 1 \\ c^2 & \text{voor } x = 1 \\ 2c^x & \text{voor } x < 1. \end{cases}$

Bepaal voor welke waarde(n) van c f_c links-continu is in $x = 1$,
bepaal voor welke waarde(n) van c f_c rechts-continu is in $x = 1$,
bepaal voor welke waarde(n) van c f_c continu is in $x = 1$.

Functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_c(x) = \begin{cases} 2x^2 + c & \text{voor } x > 1 \\ c^2 & \text{voor } x = 1 \\ 2c^x & \text{voor } x < 1. \end{cases}$

Er geldt: $f_c(1) = c^2$,

$\lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 1} 2c^x = 2c$, $\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} 2x^2 + c = c + 2$.

Functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_c(x) = \begin{cases} 2x^2 + c & \text{voor } x > 1 \\ c^2 & \text{voor } x = 1 \\ 2c^x & \text{voor } x < 1. \end{cases}$

Er geldt: $f_c(1) = c^2$,

$\lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 1} 2c^x = 2c$, $\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} 2x^2 + c = c + 2$.

Links-continuïteit:

f_c is links-continu in $x = 1 \iff \lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = f_c(1)$

$\iff 2c = c^2 \iff c^2 - 2c = 0 \iff c(c-2) = 0$

$\iff c = 0$ of $c = 2$.

Functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_c(x) = \begin{cases} 2x^2 + c & \text{voor } x > 1 \\ c^2 & \text{voor } x = 1 \\ 2c^x & \text{voor } x < 1. \end{cases}$

Er geldt: $f_c(1) = c^2$,

$\lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 1} 2c^x = 2c$, $\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} 2x^2 + c = c + 2$.

Links-continuïteit:
f_c is links-continu in $x = 1 \iff \lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = f_c(1)$
$\iff 2c = c^2 \iff c^2 - 2c = 0 \iff c(c-2) = 0$
$\iff c = 0$ of $c = 2$.

Rechts-continuïteit:
f_c is rechts-continu in $x = 1 \iff \lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = f_c(1)$
$\iff c + 2 = c^2 \iff c^2 - c - 2 = 0 \iff (c+1)(c-2) = 0$
$\iff c = -1$ of $c = 2$.

Functies met een parameter

Gegeven is de functie $f_c(x) = \begin{cases} 2x^2 + c & \text{voor } x > 1 \\ c^2 & \text{voor } x = 1 \\ 2c^x & \text{voor } x < 1. \end{cases}$

Continuïteit:

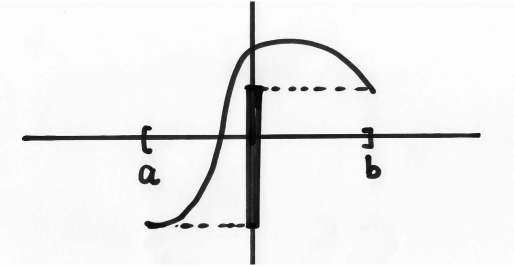
f_c is links-continu in $x = 1 \iff c = 0$ of $c = 2$,
f_c is rechts-continu in $x = 1 \iff c = -1$ of $c = 2$.

Dus f_c is continu in $x = 1$

$\iff f_c$ is links-continu in $x = 1$ en rechts-continu in $x = 1$
$\iff c = 2$.

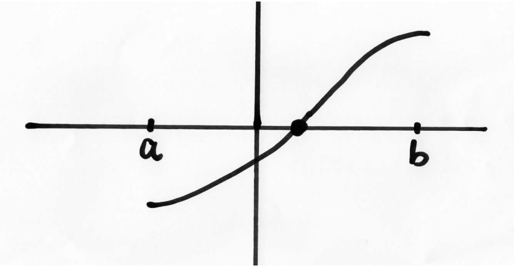
Deel 3: De tussenwaardestelling en benadering van nulpunten

De tussenwaardestelling



Laat f een continue functie zijn op een gesloten interval $[a, b]$.
Dan neemt f op $[a, b]$ alle waarden aan die tussen $f(a)$ en $f(b)$ liggen.

Een belangrijk speciaal geval



Laat f een continue functie zijn op $[a, b]$. Neem aan dat $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$ of $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$. Dan is er een $c \in (a, b)$ met $f(c) = 0$.

Namelijk f neemt op $[a, b]$ alle waarden tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan dus zeker de waarde 0.

Deze stelling kan worden gebruikt om nulpunten van f te benaderen (bisectiemethode).

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$.

Uit het eerste college volgt: wanneer $f(x)$ een geheeltallig nulpunt heeft dan is dit een positieve of negatieve deler van -3, dat wil zeggen 1, -1, 3 of -3. Maar $f(1) = -1$, $f(-1) - 5$, $f(3) = 27$, $f(-3) = -33$. Dus f heeft geen geheeltallige nulpunten.

Aan de andere kant is $f(x)$ stijgend (want x^3 en x zijn stijgend) en continu, en f neemt zowel waarden > 0 als waarden < 0 aan. Dus f heeft precies één nulpunt.

We willen dit nulpunt benaderen.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$. Deze functie is continu (belangrijke opmerking).

- Er geldt $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$.
  Dus het nulpunt van f ligt in $(1, 2)$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$. Deze functie is continu (belangrijke opmerking).

- Er geldt $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$.
  Dus het nulpunt van f ligt in $(1, 2)$.
- Neem het midden van $(1, 2)$, dat is $\frac{3}{2}$. Er geldt $f(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{3}{2})$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$. Deze functie is continu (belangrijke opmerking).

- Er geldt $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$.
  Dus het nulpunt van f ligt in $(1, 2)$.
- Neem het midden van $(1, 2)$, dat is $\frac{3}{2}$. Er geldt $f(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{3}{2})$.
- Neem het midden van $(1, \frac{3}{2})$, dat is $\frac{5}{4}$. Er geldt $f(\frac{5}{4}) = \frac{13}{64} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{5}{4})$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$. Deze functie is continu (belangrijke opmerking).

- Er geldt $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$.
  Dus het nulpunt van f ligt in $(1, 2)$.
- Neem het midden van $(1, 2)$, dat is $\frac{3}{2}$. Er geldt $f(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{3}{2})$.
- Neem het midden van $(1, \frac{3}{2})$, dat is $\frac{5}{4}$. Er geldt $f(\frac{5}{4}) = \frac{13}{64} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{5}{4})$.
- Neem het midden van $(1, \frac{5}{4})$, dat is $\frac{9}{8}$. Er geldt $f(\frac{9}{8}) = -\frac{231}{512} < 0$.
  Omdat $f(\frac{5}{4}) > 0$ ligt het nulpunt van f in $(\frac{9}{8}, \frac{5}{4})$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^3 + x - 3$. Deze functie is continu (belangrijke opmerking).

- Er geldt $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$.
  Dus het nulpunt van f ligt in $(1, 2)$.
- Neem het midden van $(1, 2)$, dat is $\frac{3}{2}$. Er geldt $f(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{3}{2})$.
- Neem het midden van $(1, \frac{3}{2})$, dat is $\frac{5}{4}$. Er geldt $f(\frac{5}{4}) = \frac{13}{64} > 0$.
  Omdat $f(1) < 0$ ligt het nulpunt van f in $(1, \frac{5}{4})$.
- Neem het midden van $(1, \frac{5}{4})$, dat is $\frac{9}{8}$. Er geldt $f(\frac{9}{8}) = -\frac{231}{512} < 0$.
  Omdat $f(\frac{5}{4}) > 0$ ligt het nulpunt van f in $(\frac{9}{8}, \frac{5}{4})$.
- We kunnen zo doorgaan. Na de volgende stap vinden we een interval van lengte $\frac{1}{16}$ dat het nulpunt van f bevat, daarna een interval van lengte $\frac{1}{32}$, enzovoort.

De bisectiemethode

De procedure op de vorige dia kan algemeen worden gebruikt om een nulpunt van een continue functie te benaderen.

Veronderstel bijvoorbeeld dat $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. Dan bevat (a, b) een nulpunt van f. Neem het midden van (a, b); noem dit c en bereken $f(c)$.

Als $f(c) = 0$ dan hebben we een nulpunt;
als $f(c) > 0$ dan ligt er een nulpunt van f in (a, c) want $f(a) < 0$;
als $f(c) < 0$ dan ligt er een nulpunt van f in (c, b) want $f(b) > 0$.

De lengte van elk van de intervallen (a, c) en (c, b) is de helft van de lengte van (a, b).
We hebben dus een interval gevonden dat een nulpunt van f bevat dat de helft korter is dan (a, b).

We kunnen dit proces herhalen. We vinden dan na iedere stap een interval dat de helft korter is dat een nulpunt van f bevat.

Einde van het college