CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

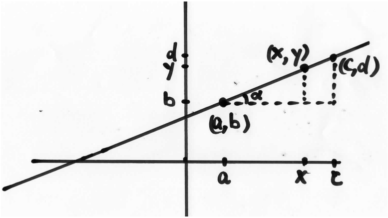
7e college: Differentiëren

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Definities

Vergelijking van een lijn



Gegeven is de lijn door de punten (a, b) en (c, d).
Neem een willekeurig punt (x, y) op de lijn.

Dan is

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{d-b}{c-a} = \tan\alpha.$$

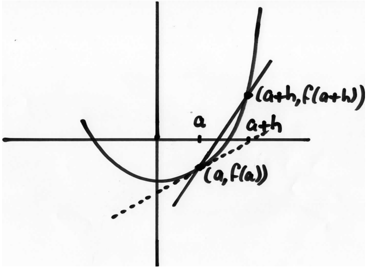
Dit geeft $y - b = \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a)$ ofwel

$$y = b + \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a) \quad \text{(de vergelijking van de lijn).}$$

We noemen $\frac{d-b}{c-a}$ de **richtingscoëfficiënt** van de lijn.

Deze is gelijk aan de tangens van de **hellingshoek** α.

De afgeleide



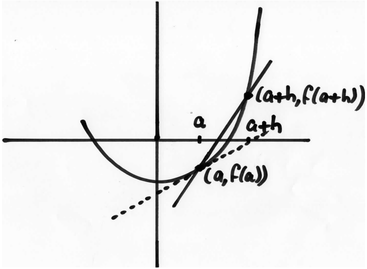
Laat f een functie zijn. Neem een punt $(a, f(a))$ op de grafiek van f, en een ander punt $(a+h, f(a+h))$ in de buurt van $(a, f(a))$. Het getal h mag ook negatief zijn.

Dan heeft de lijn door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ vergelijking

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot (x - a).$$

Wanneer we h naar 0 laten naderen (van rechts of van links) dan nadert $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ hopelijk naar een limiet, en de lijn door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ hopelijk naar een limietlijn, de **raaklijn** aan de grafiek van f in $(a, f(a))$.

De afgeleide

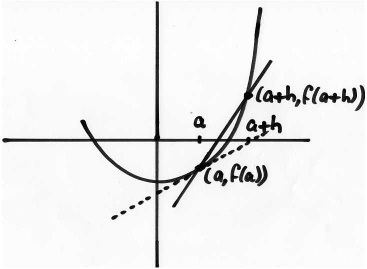


Laat f een functie zijn. Neem aan dat f gedefinieerd is in $x = a$ en in een interval rondom $x = a$.

We zeggen dat f **differentieerbaar** is in $x = a$ als $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bestaat.

We noemen deze limiet de **afgeleide** van f in a, notatie $f'(a)$ of $\frac{df}{dx}(a)$ of $\frac{dy}{dx}(a)$ als $y = f(x)$.

Raaklijn, lineaire benadering



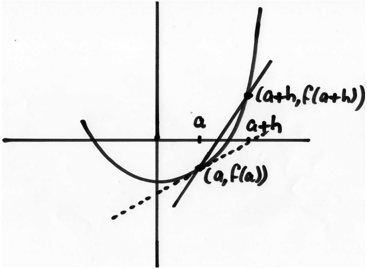
Laat f een functie zijn die differentieerbaar is in $x = a$.

Dan heeft de grafiek van f een raaklijn in het punt $(a, f(a))$. De vergelijking daarvan is

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dus de afgeleide $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

Raaklijn, lineaire benadering



Laat f een functie zijn die differentieerbaar is in $x = a$.

Dan heeft de grafiek van f een raaklijn in het punt $(a, f(a))$. De vergelijking daarvan is

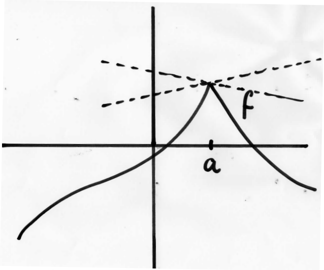
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dus de afgeleide $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

$f(a) + f'(a)(x - a)$ is een redelijke benadering van $f(x)$ wanneer x dichtbij a ligt (de lineaire benadering).

Wanneer x verder van a vandaan ligt is dit geen goede benadering meer.

Relatie tussen continuïteit en differentieerbaarheid



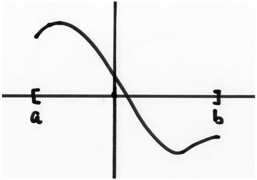
Ruwgezegd is een functie f continu in $x = a$ als de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ geen gat heeft, en differentieerbaar in $x = a$ als de grafiek van f in $(a, f(a))$ geen gat en geen knik heeft
(dit is natuurlijk geen goede wiskundige formulering maar het geeft het idee).

Dus differentieerbaarheid is sterker dan continuïteit.

De functie in het plaatje is wel continu (geen gat) maar niet differentieerbaar (wel een knik) in $x = a$.

In het punt $(a, f(a))$ zijn meerdere lijnen die raken aan de grafiek van f. De eis voor differentieerbaarheid is dat er maar één raaklijn is.

Differentieerbaarheid in randpunten



Als a een linker randpunt is van het domein van f dan zeggen we dat f differentieerbaar is in $x = a$ als $\lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bestaat;

als a een rechter randpunt is van het domein van f dan zeggen we dat f differentieerbaar is in $x = a$ als $\lim\limits_{h \uparrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bestaat.

De functie in het plaatje is gedefinieerd op $[a, b]$. Deze functie is differentieerbaar in de randpunten $x = a$ en $x = b$ en in alle punten daartussen.

Verticale raaklijnen

Als $\lim_{h \downarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \pm\infty$ en/of $\lim_{h \uparrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \pm\infty$ dan heeft de grafiek van f een verticale raaklijn in $(a, f(a))$.

Verticale raaklijnen

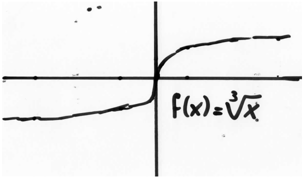
Als $\lim_{h\downarrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ en/of $\lim_{h\uparrow 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ dan heeft de grafiek van f een verticale raaklijn in $(a, f(a))$.

Voorbeeld. Laat $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Dan geldt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\downarrow 0} h^{-2/3} = \infty,$$

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{u=-h}{=} \lim_{u\downarrow 0} \frac{(-u)^{1/3}}{-u} = \lim_{u\downarrow 0} \frac{u^{1/3}}{u} = \infty.$$

Dus de grafiek van f heeft een verticale raaklijn in $(0,0)$.



De afgeleide functie

We zeggen dat een functie $f : D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is als f differentieerbaar is in elk punt van D, dat wil zeggen $f'(x)$ bestaat voor elke $x \in D$. Dit definieert de afgeleide functie van f.

De afgeleide functie

We zeggen dat een functie $f : D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is als f differentieerbaar is in elk punt van D, dat wil zeggen $f'(x)$ bestaat voor elke $x \in D$. Dit definieert de afgeleide functie van f.

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$, direct uit de definitie van afgeleide.

De afgeleide functie

We zeggen dat een functie $f : D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is als f differentieerbaar is in elk punt van D, dat wil zeggen $f'(x)$ bestaat voor elke $x \in D$. Dit definieert de afgeleide functie van f.

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$, direct uit de definitie van afgeleide.

We gebruiken de worteltruc. Voor $x > 0$ geldt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

Deel 2: Berekenen van afgeleiden

Rekenregels voor som, verschil, product, quotiënt

We geven zonder bewijs enkele regels.

Zijn $f, g : D \to \mathbb{R}$ differentieerbare functies. Dan zijn cf (constante maal f), $f+g$, $f-g$, fg differentieerbaar op D en f/g is differentieerbaar voor alle $x \in D$ met $g(x) \neq 0$. Verder geldt voor hun afgeleiden

$$(cf)' = cf', \quad (f+g)' = f' + g', \quad (f-g)' = f' - g',$$
$$(fg)' = f'g + fg', \quad (f/g)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

De kettingregel

De samengestelde functie $g(f(x))$ (of $g \circ f$) krijg je door in de uitdrukking voor $g(x)$, overal x te vervangen door $f(x)$. Als f en g differentieerbaar zijn dan is $g \circ f$ dat ook.

Zijn, f, g differentieerbare functies, waarbij het bereik van f bevat is in het domein van g. Dan geldt:

$$(g(f(x))' = g'(f(x))f'(x),$$

dat wil zeggen we moeten in de uitdrukking voor $g'(x)$ overal x vervangen door $f(x)$ en daarna met $f(x)$ vermenigvuldigen.

Schrijf $y = f(x)$, $z = g(y)$. Dan is $z = g(f(x))$. We kunnen de afgeleiden van deze functies noteren als

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad g'(y) = \frac{dz}{dy}, \quad g(f(x))' = \frac{dz}{dx}.$$

Dan kunnen we de kettingregel schrijven als $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Een basislijstje van afgeleiden

We geven zonder bewijs een lijstje afgeleiden van enkele belangrijke functies (een bewijs heeft nogal wat voeten in aarde).

$f(x) = c$ (constante functie) $\Rightarrow f'(x) = 0$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$
$\sin' x = \cos x$
$\cos' x = -\sin x$
$(e^x)' = e^x$
$\ln' x = \frac{1}{x}$.

We kunnen van allerlei functies de afgeleiden berekenen met behulp van dit lijstje en de rekenregels van de vorige dia's.

Voorbeeld

Wat is de afgeleide van $\tan x$?

Voorbeeld

Wat is de afgeleide van $\tan x$?

Volgens de quotiëntregel is

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \sin' x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld

Wat is de afgeleide van $\tan x$?

Volgens de quotiëntregel is

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \sin' x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Een andere uitdrukking voor $\tan' x$ is

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Een toepassing van de kettingregel

Gegeven is een differentieerbare functie f. Druk de afgeleide van $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ uit in de afgeleide van f.

Een toepassing van de kettingregel

Gegeven is een differentieerbare functie f. Druk de afgeleide van $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ uit in de afgeleide van f.

$$g'(x) = f'(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)' = f'(x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1).$$

Herhaaldelijke toepassing van de kettingregel

1) Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{\sin(\sqrt[3]{x})}$.

2) Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(\pi^3, f(\pi^3))$.

Herhaaldelijke toepassing van de kettingregel

1) Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{\sin(\sqrt[3]{x})}$.

2) Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(\pi^3, f(\pi^3))$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}(\sin(\sqrt[3]{x}))' = e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\sin'(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x})' \\
&= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\cos(\sqrt[3]{x})(x^{1/3})' \\
&= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\cos(\sqrt[3]{x}) \cdot \tfrac{1}{3}x^{-2/3}.
\end{aligned}
$$

Herhaaldelijke toepassing van de kettingregel

1) Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{\sin(\sqrt[3]{x})}$.

2) Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(\pi^3, f(\pi^3))$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}(\sin(\sqrt[3]{x}))' = e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\sin'(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x})' \\ &= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\cos(\sqrt[3]{x})(x^{1/3})' \\ &= e^{\sin(\sqrt[3]{x})}\cos(\sqrt[3]{x}) \cdot \tfrac{1}{3}x^{-2/3}. \end{aligned}$$

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in $(a, f(a))$ is
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
In ons geval is $a = \pi^3$, $f(\pi^3) = e^{\sin\pi} = e^0 = 1$ en

$$f'(\pi^3) = e^{\sin\pi}\cos\pi \cdot \tfrac{1}{3}(\pi^3)^{-2/3} = e^0(-1) \cdot \tfrac{1}{3}\pi^{-2} = -\tfrac{1}{3}\pi^{-2}.$$

Dus de vergelijking van de raaklijn is $y = 1 - \frac{1}{3}\pi^{-2}(x - \pi^3)$

(dit hoef je niet verder uit te werken).

Een ingewikkelder voorbeeld

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right)$.

Een ingewikkelder voorbeeld

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)$.

Wegens de kettingregel is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln'\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' = \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' \\ &= \frac{x^4+1}{x^2+1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)'. \end{aligned}$$

Een ingewikkelder voorbeeld

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right)$.

Wegens de kettingregel is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln'\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' = \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' \\ &= \frac{x^4+1}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)'. \end{aligned}$$

Volgens de quotiëntregel is

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' &= \frac{(x^4+1)(x^2+1)' - (x^2+1)(x^4+1)'}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2x^5+2x-4x^5-4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^4+1)^2}. \end{aligned}$$

Een ingewikkelder voorbeeld

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)$.

Wegens de kettingregel is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln'\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' = \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' \\ &= \frac{x^4+1}{x^2+1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)'. \end{aligned}$$

Volgens de quotiëntregel is

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)' &= \frac{(x^4+1)(x^2+1)' - (x^2+1)(x^4+1)'}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2x^5+2x-4x^5-4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^4+1)^2}. \end{aligned}$$

Dus

$$f'(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1} \cdot \frac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^5-4x^3+2x}{x^4+1}.$$

Differentiatie van functies van de vorm $f(x)^{g(x)}$

We schrijven $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ en differentiëren dit met behulp van de kettingregel.

Differentiatie van functies van de vorm $f(x)^{g(x)}$

We schrijven $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ en differentiëren dit met behulp van de kettingregel.

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^x$.

Differentiatie van functies van de vorm $f(x)^{g(x)}$

We schrijven $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ en differentiëren dit met behulp van de kettingregel.

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^x$.

We schrijven $f(x) = e^{x \ln x}$. Dit geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln' x + x'\ln x) \\ &= e^{x\ln x}\cdot(x\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln x) \\ &= x^x(1+\ln x). \end{aligned}$$

Differentiëren van inverse functies

Laat f een differentieerbare functie zijn met domain D en bereik B. Dan is f^{-1} ook differentieerbaar met domein B en bereik D, en er geldt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Differentiëren van inverse functies

Laat f een differentieerbare functie zijn met domain D en bereik B. Dan is f^{-1} ook differentieerbaar met domein B en bereik D, en er geldt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bewijs. Schrijf $y = f^{-1}(x)$. Dan is $x = f(y)$, dus $x = f(f^{-1}(x))$. Passen we hierop de kettingregel toe dan vinden we

$$x' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x), \qquad \text{dus } 1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$$

$$\text{dus } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Afgeleide van $\arcsin x$

We bekijken $\sin x$ op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

Op dit domein is $\sin x$ stijgend, dus inverteerbaar. Het bereik van $\sin x$ is $[-1, 1]$.

De inverse van $\sin x$ op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ noemen we $\arcsin x$. Dus $\sin(\arcsin x) = x$.

De functie $\arcsin x$ heeft domein $[-1, 1]$ en bereik $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Er geldt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Afgeleide van $\arcsin x$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bewijs. Uit de formule voor de afgeleide van de inverse volgt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

We kunnen dit vereenvoudigen. Schrijf $y = \arcsin x$. Dan is $\sin y = x$, $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$.

Er geldt $\cos y \geq 0$, $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, dus $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

Dit geeft tenslotte $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Hieruit volgt $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\square$

Afgeleide van $\arctan x$

We bekijken $\tan x$ op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Op dit domein is $\tan x$ stijgend, dus inverteerbaar. Het bereik van $\tan x$ is $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

De inverse van $\tan x$ op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ noemen we $\arctan x$. Dus $\tan(\arctan x) = x$.

De functie $\arctan x$ heeft domein $\mathbb{R}$ en bereik $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Er geldt

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Afgeleide van $\arctan x$

We bekijken $\tan x$ op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Op dit domein is $\tan x$ stijgend, dus inverteerbaar. Het bereik van $\tan x$ is $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

De inverse van $\tan x$ op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ noemen we $\arctan x$. Dus $\tan(\arctan x) = x$.

De functie $\arctan x$ heeft domein $\mathbb{R}$ en bereik $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Er geldt

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bewijs. We weten dat $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.

Door dit in de formule voor de afgeleide van de inverse in te vullen volgt

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Einde van het college