CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

8e college: Maxima en minima

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Deel 1: Definities

Stijgende en dalende functies

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn.

Definities.

f is **stijgend** op D	als $f(x_2) > f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **niet-dalend** op D	als $f(x_2) \geq f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **dalend** op D	als $f(x_2) < f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **niet-stijgend** op D	als $f(x_2) \leq f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$

Stijgende en dalende functies

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn.

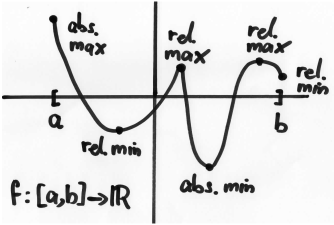
Definities.

f is **stijgend** op D	als $f(x_2) > f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **niet-dalend** op D	als $f(x_2) \geq f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **dalend** op D	als $f(x_2) < f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$
f is **niet-stijgend** op D	als $f(x_2) \leq f(x_1)$ voor alle $x_1, x_2 \in D$ met $x_2 > x_1$

Als f differentieerbaar op D is dan geldt het volgende:

$f' > 0$ op $D \Rightarrow f$ stijgend op D,
$f' \geq 0$ op $D \Rightarrow f$ niet-dalend op D,
$f' < 0$ op $D \Rightarrow f$ dalend op D,
$f' \leq 0$ op $D \Rightarrow f$ niet-stijgend op D.

Extremen (maxima en minima)



Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$.

Definities.

f neemt in $x = a$ een **globaal/absoluut maximum op** D aan als $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in D$;

f neemt in $x = a$ een **lokaal/relatief maximum op** D aan als $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in D$ in de buurt van a;

f neemt in $x = a$ een **globaal/absoluut minimum op** D aan als $f(x) \geq f(a)$ voor alle $x \in D$;

f neemt in $x = a$ een **lokaal/relatief minimum op** D aan als $f(x) \geq f(a)$ voor alle $x \in D$ in de buurt van a.

Hoe vind je maxima en minima?

De volgende stelling is een hulpmiddel om maxima en minima te bepalen.

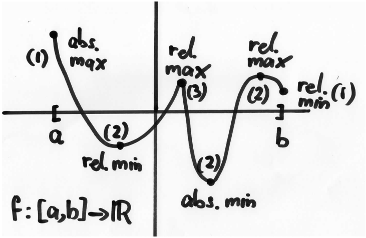
Stelling 1

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$. Neem aan dat f in a een absoluut of relatief maximum of minimum op D aanneemt. Dan zijn er drie mogelijkheden:

(1) a is een randpunt van D;

(2) a is geen randpunt van D, f is differentieerbaar in $x = a$ en $f'(a) = 0$;

(3) a is geen randpunt van D en f is niet differentieerbaar in $x = a$.



Hoe vind je maxima en minima?

Stelling 1

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$. Neem aan dat f in a een absoluut of relatief maximum of minimum op D aanneemt. Dan zijn er drie mogelijkheden:

(1) a is een randpunt van D;

(2) a is geen randpunt van D, f is differentieerbaar in $x = a$ en $f'(a) = 0$;

(3) a is geen randpunt van D en f is niet differentieerbaar in $x = a$.

We zullen meestal alleen met gevallen (1) en (2) te maken hebben.

Hoe vind je maxima en minima?

Stelling 1

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn en $a \in D$. Neem aan dat f in a een absoluut of relatief maximum of minimum op D aanneemt. Dan zijn er drie mogelijkheden:

(1) a is een randpunt van D;

(2) a is geen randpunt van D, f is differentieerbaar in $x = a$ en $f'(a) = 0$;

(3) a is geen randpunt van D en f is niet differentieerbaar in $x = a$.

Wanneer we een punt a hebben gevonden dat aan (1), (2) of (3) voldoet wil dat nog niet zeggen dat f daar een absoluut of relatief maximum of minimum aanneemt.
En zelfs als dat zo is, dan moeten we nog onderzoeken of we te maken hebben met een maximum of minimum, en of dat absoluut of relatief is.

Dit doen we in het algemeen met een **tekenoverzicht van de afgeleide.** Daaruit halen we waar de functie f stijgend of dalend is.

Voorbeeld

Gevraagd wordt de extremen van $f(x) = x^3 - 3x + 5$ op $[-2, 2]$ te bepalen met plaats (x-coördinaat), grootte (y-coördinaat) en aard (maximum of minimum, absoluut of relatief).

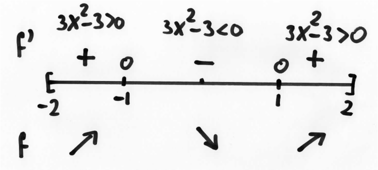
Voorbeeld

Gevraagd wordt de extremen van $f(x) = x^3 - 3x + 5$ op $[-2, 2]$ te bepalen met plaats (x-coördinaat), grootte (y-coördinaat) en aard (maximum of minimum, absoluut of relatief).

Eventuele extremen worden aangenomen op de rand van het domein, dus in $x = 2$ of $x = -2$ en in de punten waar $f'(x) = 0$.

Er geldt: $f'(x) = 3x^2 - 3$, dus $f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.

We maken een tekenoverzicht van f' om te zien waar f stijgt of daalt.



Dus f neemt op $[-2, 2]$ een minimum aan in $x = -2$, een maximum in $x = -1$, een minimum in $x = 1$ en een maximum in $x = 2$. We moeten nagaan of die maxima en minima absoluut of relatief zijn.

Voorbeeld

Gevraagd wordt de extremen van $f(x) = x^3 - 3x + 5$ op $[-2, 2]$ te bepalen met plaats (x-coördinaat), grootte (y-coördinaat) en aard (maximum of minimum, absoluut of relatief).

We hebben gezien dat f op $[-2, 2]$ een minimum aanneemt in $x = -2$, een maximum in $x = -1$, een minimum in $x = 1$ en een maximum in $x = 2$.

We moeten nagaan of die maxima en minima absoluut of relatief zijn. Daartoe berekenen we de functiewaarden van f in $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Voorbeeld

Gevraagd wordt de extremen van $f(x) = x^3 - 3x + 5$ op $[-2, 2]$ te bepalen met plaats (x-coördinaat), grootte (y-coördinaat) en aard (maximum of minimum, absoluut of relatief).

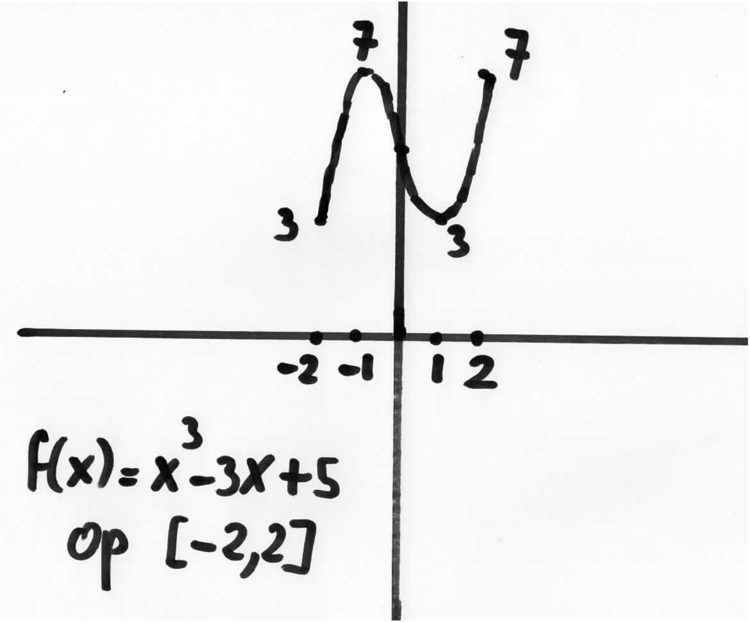
We hebben gezien dat f op $[-2, 2]$ een minimum aanneemt in $x = -2$, een maximum in $x = -1$, een minimum in $x = 1$ en een maximum in $x = 2$.

We moeten nagaan of die maxima en minima absoluut of relatief zijn. Daartoe berekenen we de functiewaarden van f in $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Er geldt $f(-2) = 3$, $f(-1) = 7$, $f(1) = 3$, $f(2) = 7$. De twee maxima zijn even groot, en de twee minima zijn even groot. Dus de beide maxima zijn absoluut en de beide minima zijn absoluut.

plaats	**grootte**	**aard**
-2	3	absoluut minimum
-1	7	absoluut maximum
1	3	absoluut mimimum
2	7	absoluut maximum

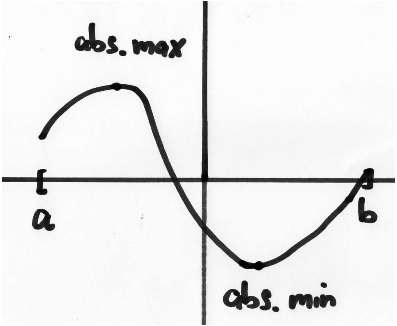
Voorbeeld



Nog een stelling over maxima en minima

Stelling 2

Een continue functie neemt op een **gesloten en begrensd** interval een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.



Nog een stelling over maxima en minima

Stelling 2

Een continue functie neemt op een **gesloten en begrensd** interval een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.

De eis dat het domein van f een gesloten en begrensd interval is, is essentieel. Continue functies hoeven op niet gesloten, of niet begrensde intervallen geen absoluut maximum of minimum aan te nemen.

Nog een stelling over maxima en minima

Stelling 2

Een continue functie neemt op een **gesloten en begrensd** interval een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.

De eis dat het domein van f een gesloten en begrensd interval is, is essentieel. Continue functies hoeven op niet gesloten, of niet begrensde intervallen geen absoluut maximum of minimum aan te nemen.

Voorbeeld 1. $f(x) = x$ op het open interval $(-1, 1)$.

Je kan de waarde van $f(x)$ steeds groter maken door x naar 1 te laten stijgen. Maar $f(x)$ bereikt de waade 1 nooit omdat het domein niet het getal 1 bevat. Dus $f(x)$ neemt geen absoluut maximum aan op $(-1, 1)$. Evenzo neemt $f(x)$ geen absoluut minimum aan op $(-1, 1)$.

Natuurlijk neemt $f(x) = x$ op het gesloten interval $[-1, 1]$ wel een absoluut maximum aan, namelijk in $x = 1$, en een absoluut minimum, namelijk in $x = -1$.

Nog een stelling over maxima en minima

Stelling 2

Een continue functie neemt op een **gesloten en begrensd** interval een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.

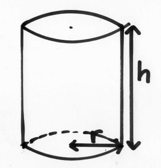
De eis dat het domein van f een gesloten en begrensd interval is, is essentieel. Continue functies hoeven op niet gesloten, of niet begrensde intervallen geen absoluut maximum of minimum aan te nemen.

Voorbeeld 2. $f(x) = x$ op het onbegrensde interval $[0, \infty)$.

$f(x)$ neemt zeker geen absoluut maximum aan op $[0, \infty)$, hij kan daar willekeurig groot worden.

Deel 2: Concrete voorbeelden

Een cylinder met gegeven inhoud en minimale oppervlakte



Gegeven is een cylinder van straal r en hoogte h.

De onder- en bovenkant van de cylinder zijn cirkels van straal r, deze hebben oppervlakte πr^2.

De zijkant van de cylinder heeft oppervlakte gelijk aan
(omtrek onderkant)$\times$hoogte$= 2\pi r \cdot h$
(knip de cylinder open en rol hem uit, dan wordt de zijkant een rechthoek met basis $2\pi r$ en hoogte h).

Dus de **totale oppervlakte** van de cylinder
(onderkant+bovenkant+zijkant) is $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

De **inhoud** van de cylinder is (oppervlakte onderkant)$\times$hoogte$= \pi r^2 h$.

Een cylinder met gegeven inhoud en minimale oppervlakte

Gegeven is een cylinder van straal r en hoogte h.

Opgave 1. Veronderstel dat de inhoud $\pi r^2 h$ van de cylinder gelijk is aan 1. Bepaal r en h zodat de totale oppervlakte $2\pi r^2 + 2\pi rh$ van de cylinder minimaal is.

Een cylinder met gegeven inhoud en minimale oppervlakte

Gegeven is een cylinder van straal r en hoogte h.

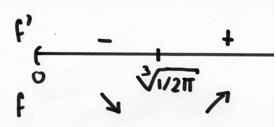
Opgave 1. Veronderstel dat de inhoud $\pi r^2 h$ van de cylinder gelijk is aan 1. Bepaal r en h zodat de totale oppervlakte $2\pi r^2 + 2\pi rh$ van de cylinder minimaal is.

Volgens gegeven is $\pi r^2 h = 1$, dus $h = 1/(\pi r^2)$. Als we dit in de formule voor de totale oppervlakte invullen krijgen we

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2/r.$$

De straal r is > 0. Dus we moeten r bepalen zodat $f(r)$ minimaal is, dat wil zeggen, we moeten het absolute minimum bepalen van $f(r)$ op $(0, \infty)$.

Een cylinder met gegeven inhoud en minimale oppervlakte



We moeten bepalen waar $f(r) = 2\pi r^2 + 2/r$ op $(0, \infty)$ zijn absolute minimum aanneemt.

Er geldt $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = \dfrac{4\pi(r^3 - 1/(2\pi))}{r^2}$.

Uit het bovenstaande tekenoverzicht van f' volgt dat f zijn absolute minimum aanneemt in $r = \sqrt[3]{1/(2\pi)} = (2\pi)^{-1/3}$.

Gegeven was dat de inhoud $\pi r^2 h$ van de cylinder gelijk is aan 1. Dus de bijbehorende waarde voor h is

$$\pi^{-1} r^{-2} = \pi^{-1}(2\pi)^{2/3} = 2^{2/3}\pi^{-1/3} = (4/\pi)^{1/3}.$$

We zien dat de totale oppervlakte van de cylinder minimaal is als $r = \sqrt[3]{1/(2\pi)}$ en $h = \sqrt[3]{4/\pi}$.

Een probleem voor getallen

Opgave 2. Bepaal reële getallen $x, y \geq 0$ met $x + y = 1$ zodat x^3y^2 maximaal is.

Een probleem voor getallen

Opgave 2. Bepaal reële getallen $x, y \geq 0$ met $x + y = 1$ zodat x^3y^2 maximaal is.

Uit de voorwaarden dat $x, y \geq 0$ en $x + y = 1$ volgt dat $0 \leq x \leq 1$ en $y = 1 - x$.
We moeten dus bepalen voor welke x de functie $f(x) = x^3(1-x)^2 = x^3(x-1)^2$ zijn absolute maximum op $[0, 1]$ aanneemt.

Een probleem voor getallen

Opgave 2. Bepaal reële getallen $x, y \geq 0$ met $x + y = 1$ zodat x^3y^2 maximaal is.

Uit de voorwaarden dat $x, y \geq 0$ en $x + y = 1$ volgt dat $0 \leq x \leq 1$ en $y = 1 - x$.
We moeten dus bepalen voor welke x de functie $f(x) = x^3(1-x)^2 = x^3(x-1)^2$ zijn absolute maximum op $[0, 1]$ aanneemt.

Er geldt

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 \cdot ((x-1)^2)' + (x^3)'(x-1)^2 \\ &= x^3 \cdot 2(x-1) + 3x^2(x-1)^2 = (x-1)(2x^3 + 3x^2(x-1)) \\ &= (x-1)(5x^3 - 3x^2) = (x-1)x^2(5x-3). \end{aligned}$$

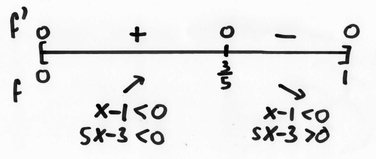
Een probleem voor getallen

Opgave 2. Bepaal reële getallen $x, y \geq 0$ met $x + y = 1$ zodat x^3y^2 maximaal is.

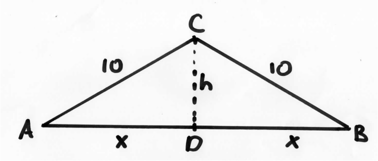
Uit de voorwaarden dat $x, y \geq 0$ en $x + y = 1$ volgt dat $0 \leq x \leq 1$ en $y = 1 - x$.
We moeten dus bepalen voor welke x de functie
$f(x) = x^3(1-x)^2 = x^3(x-1)^2$ zijn absolute maximum op $[0, 1]$ aanneemt.

We hebben gezien dat $f'(x) = (x-1)x^2(5x-3)$.

Uit het tekenoverzicht van f' blijkt dat f op $[0, 1]$ zijn absolute maximum aanneemt voor $x = \frac{3}{5}$. Dus x^3y^2 is maximaal voor $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$.

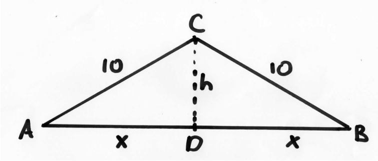


Een probleem voor gelijkbenige driehoeken



Opgave 3. Gegeven is een gelijkbenige driehoek waarvan twee van de zijden lengte 10 hebben. Bepaal de maximale oppervlakte van zo'n driehoek.

Een probleem voor gelijkbenige driehoeken



Opgave 3. Gegeven is een gelijkbenige driehoek waarvan twee van de zijden lengte 10 hebben. Bepaal de maximale oppervlakte van zo'n driehoek.

Laat $2x$ de lengte van de basis van de driehoek zijn en h de hoogte (met $2x$ rekent het makkelijker).

Volgens de Stelling van Pythagoras is $x^2 + h^2 = 10^2$, dus $h^2 = 100 - x^2$, $h = \sqrt{100 - x^2}$.

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}\times$basis$\times$hoogte$= xh = x\sqrt{100 - x^2}$.

Er geldt $x \geq 0$ en $x \leq 10$ omdat de uitdrukking onder het wortelteken ≥ 0 moet zijn.

Dus we moeten het absolute maximum bepalen van $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ op $[0, 10]$.

Een probleem voor gelijkbenige driehoeken

Opgave 3. Gegeven is een gelijkbenige driehoek waarvan twee van de zijden lengte 10 hebben. Bepaal de maximale oppervlakte van zo'n driehoek.

De gevraagde oppervlakte is het absolute maximum van $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ op $[0, 10]$.

Een probleem voor gelijkbenige driehoeken

Opgave 3. Gegeven is een gelijkbenige driehoek waarvan twee van de zijden lengte 10 hebben. Bepaal de maximale oppervlakte van zo'n driehoek.

De gevraagde oppervlakte is het absolute maximum van $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ op $[0, 10]$. Er geldt

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot ((100 - x^2)^{1/2})' + x' \cdot (100 - x^2)^{1/2} \\ &= x \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (100 - x^2)^{-1/2}(-2x) + (100 - x^2)^{1/2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x \cdot (-2x)}{(100 - x^2)^{1/2}} + \frac{100 - x^2}{(100 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x^2 + 100 - x^2}{(100 - x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{100 - 2x^2}{(100 - x^2)^{1/2}} = \frac{2(50 - x^2)}{(100 - x^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Een probleem voor gelijkbenige driehoeken

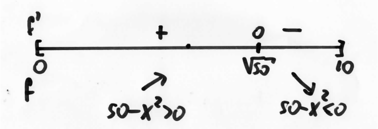
Opgave 3. Gegeven is een gelijkbenige driehoek waarvan twee van de zijden lengte 10 hebben. Bepaal de maximale oppervlakte van zo'n driehoek.

De gevraagde oppervlakte is het absolute maximum van $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$ op $[0, 10]$.

We hebben gezien dat $f'(x) = \dfrac{2(50 - x^2)}{(100 - x^2)^{1/2}}$.

Uit het tekenoverzicht van f' blijkt dat $f(x)$ zijn absolute maximum op $[0, 10]$ aanneemt in $x = \sqrt{50}$.

Dus de maximale oppervlakte is $f(\sqrt{50}) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 50$.



Einde van het college