CONTINUE WISKUNDE 1, 2020

9e college: Scheve asymptoten, schetsen van grafieken

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

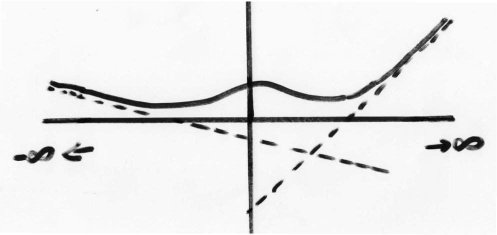
Deel 1: Scheve asymptoten

Scheve asymptoten

Laat f een functie zijn.

We noemen de lijn $y = ax + b$ een scheve asymptoot van f voor $x \to \infty$ wanneer $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, dat wil zeggen dat de grafiek van f steeds dichter bij de lijn $ax + b$ komt als $x \to \infty$.

We noemen de lijn $y = ax + b$ een scheve asymptoot van f voor $x \to -\infty$ wanneer $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, dat wil zeggen dat de grafiek van f steeds dichter bij de lijn $ax + b$ komt als $x \to -\infty$.



Voorbeeld

Bekijk de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ voor $x \neq 0$.

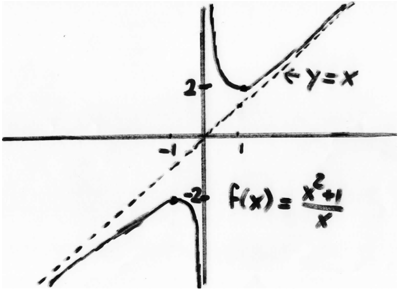
Voorbeeld

Bekijk de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ voor $x \neq 0$.

Er geldt: $f(x) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ voor $x \neq 0$.

Dus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
(dit is een afkorting voor $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = 0$).

Dus $y = x$ is een scheve asymptoot van $f(x)$ voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.



Asymptoten van rationale functies

Laat $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ een rationale functie zijn, met $p(x)$ en $q(x)$ polynomen. Dan geldt het volgende:

- Als graad $p <$ graad q dan heeft f een horizontale asymptoot $y = 0$ voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.
- Als graad $p =$ graad q dan heeft f een horizontale asymptoot $y = \ell$ voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$, waarbij $\ell \neq 0$.
- Als graad $p = 1+$ graad q dan heeft f een scheve asymptoot $y = ax + b$ voor zowel $x \to \infty$ and $x \to -\infty$.
- Als graad $p > 1+$ graad q dan heeft f geen horizontale of scheve asymptoot.

Hoe bepalen we de scheve asymptoot van een rationale functie?

We bepalen de scheve asymptoot van $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - 1}$.

Hoe bepalen we de scheve asymptoot van een rationale functie?

We bepalen de scheve asymptoot van $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - 1}$.

We beginnen met een staartdeling.

$$\begin{array}{lll}
x^3 - 1 \,/ & 2x^4 - 3x^3 + 1 & \backslash\ 2x - 3 \\
& 2x^4 - 2x \quad - & \\
\hline
& -3x^3 + 2x + 1 & \\
& -3x^3 + 3 \quad - & \\
\hline
& 2x - 2 &
\end{array}$$

Dus $2x^4 - 3x^3 + 1 = (2x - 3)(x^3 - 1) + 2x - 2$,

$f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2x - 2}{x^3 - 1}$.

Hoe bepalen we de scheve asymptoot van een rationale functie?

We hebben gezien dat $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2x-2}{x^3-1}$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (2x-3)) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-2}{x^3-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^{-2} - 2x^{-3}}{1 - x^{-3}} = 0.
\end{aligned}$$

Dus $y = 2x - 3$ is een scheve asymptoot van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

De algemene methode

Gegeven is een rationale functie $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ waarbij $p(x)$ en $q(x)$ polynomen zijn met graad $p = 1+$ graad q.

We bepalen de scheve asymptoot van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

De algemene methode

Gegeven is een rationale functie $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ waarbij $p(x)$ en $q(x)$ polynomen zijn met graad $p = 1+$ graad q.

We bepalen de scheve asymptoot van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

Voer eerst een staartdeling uit:

$$\begin{array}{lll} q(x)\,/ & p(x) & \backslash\text{quotiënt} = ax + b \\ & \dots \quad - & \\ & \overline{} & \\ & \text{rest} & \end{array}$$

als graad $p = 1+$ graad q
dan heeft het quotiënt graad 1

We vinden zo $p(x) = (\text{quotiënt})q(x) + \text{rest} = (ax + b)q(x) + \text{rest}$.

Dus $f(x) = \dfrac{(ax + b)q(x) + \text{rest}}{q(x)} = ax + b + \dfrac{\text{rest}}{q(x)}$.

De algemene methode

Gegeven is een rationale functie $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ waarbij $p(x)$ en $q(x)$ polynomen zijn met graad $p = 1+$ graad q.

We bepalen de scheve asymptoot van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

Voer eerst een staartdeling uit:

$$\begin{array}{lll} q(x)\,/ & p(x) & \backslash\text{quotiënt} = ax+b \\ & \ldots \quad - & \\ & \overline{} & \\ & \text{rest} & \end{array}$$

als graad $p = 1+$ graad q
dan heeft het quotiënt graad 1

We vinden zo $p(x) = (\text{quotiënt})q(x) + \text{rest} = (ax+b)q(x) + \text{rest}$.

Dus $f(x) = \dfrac{(ax+b)q(x) + \text{rest}}{q(x)} = ax + b + \dfrac{\text{rest}}{q(x)}$.

Je kan nu laten zien dat $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$.

Dus $y = ax + b$ is een scheve asymptoot van f voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

Deel 2: functieonderzoek, schetsen van grafieken

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);
- eventuele verticale asymptoten $x = a$ van f $(p(a) \neq 0,\ q(a) = 0)$;

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);
- eventuele verticale asymptoten $x = a$ van f ($p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$);
- voor elke verticale asymptoot $x = a$, $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$;

  om te weten of er uit de limieten $+\infty$ of $-\infty$ komt moet je een **tekenoverzicht** van f maken;

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);
- eventuele verticale asymptoten $x = a$ van f $(p(a) \neq 0,\ q(a) = 0)$;
- voor elke verticale asymptoot $x = a$, $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$;

  om te weten of er uit de limieten $+\infty$ of $-\infty$ komt moet je een **tekenoverzicht** van f maken;
- eventuele horizontale of scheve asymptoten voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$;

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);
- eventuele verticale asymptoten $x = a$ van f $(p(a) \neq 0,\ q(a) = 0)$;
- voor elke verticale asymptoot $x = a$, $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$;
  om te weten of er uit de limieten $+\infty$ of $-\infty$ komt moet je een **tekenoverzicht** van f maken;
- eventuele horizontale of scheve asymptoten voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$;
- in geval van een scheve asymptoot: kijken of de grafiek van f de scheve asymptoot ergens snijdt, om te zien of de grafiek van f steeds aan dezelfde kant van de scheve asymptoot ligt;

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

Gegeven is een functie f. We willen f onderzoeken en de grafiek van f schetsen. Daarvoor moeten we het volgende bepalen:

- het domein van f (bijvoorbeeld als $f = p/q$ dan moet $q \neq 0$ zijn);
- eventuele verticale asymptoten $x = a$ van f ($p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$);
- voor elke verticale asymptoot $x = a$, $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$;
  om te weten of er uit de limieten $+\infty$ of $-\infty$ komt moet je een **tekenoverzicht** van f maken;
- eventuele horizontale of scheve asymptoten voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$;
- in geval van een scheve asymptoot: kijken of de grafiek van f de scheve asymptoot ergens snijdt, om te zien of de grafiek van f steeds aan dezelfde kant van de scheve asymptoot ligt;
- kijken waar f stijgt of daalt, extremen met plaats (x-coördinaat), grootte (y-coördinaat) en aard (maximum/minimum, absoluut/relatief);
  daarvoor moet je f' bepalen, de nulpunten van f' en het tekenoverzicht van f'.

Wat is nodig voor het schetsen van de grafiek van een functie?

In het boek wordt ook gevraagd om de eventuele **buigpunten** (inflection points) van f te bepalen, dat zijn de punten $x = a$ waar de grafiek van f een raaklijn heeft (dus f differentieerbaar in $x = a$ of de raaklijn is verticaal) en waar de tweede afgeleide f'' van teken verandert.

Daarvoor moet je f'' uitrekenen en een tekenoverzicht maken van f'', dat is vaak veel werk, dat hoeven jullie **niet** te doen.

Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Het domein. Het domein is de verzameling van alle x waar de noemer $\neq 0$, dus $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

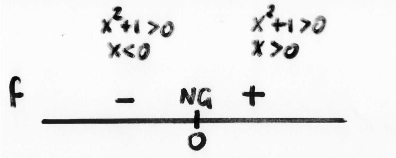
Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Het domein. Het domein is de verzameling van alle x waar de noemer $\neq 0$, dus $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Verticale asymptoten. Voor $x = 0$ is de noemer 0 en de teller $\neq 0$. Dus $x = 0$ is de verticale asymptoot van f.

De teller $x^2 + 1$ is altijd > 0. Dus $f(x) > 0$ als $x > 0$ en $f(x) < 0$ als $x < 0$.
Hieruit volgt $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$.



Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Horizontale of scheve asymptoten. We hebben al gezien dat $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Dus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,

$y = x$ is een scheve asymptoot van f voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Horizontale of scheve asymptoten. We hebben al gezien dat
$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
Dus $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
$y = x$ is een scheve asymptoot van f voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

Snijpunt van grafiek met scheve asymptoot. Als de grafiek van f de lijn $y = x$ ergens snijdt, dan geldt voor de x-coördinaat van een snijpunt dat $f(x) = x$. Maar $f(x) = x$ is onoplosbaar, want $f(x) - x = 1/x \neq 0$ voor alle x.

Dus de grafiek van f heeft geen snijpunt met de scheve asymptoot $y = x$.

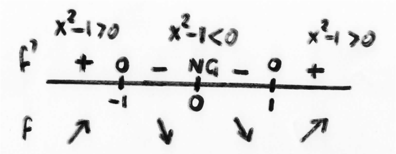
Eerste voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Extremen van f met plaats, grootte en aard. Er geldt

$$f'(x) = \frac{x \cdot 2x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Uit het onderstaande tekenoverzicht van f' blijkt dat f in $x = -1$ een maximum aanneemt, en in $x = 1$ een minimum.
Er geldt $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$.
Het maximum is kleiner dan het minimum, dus zowel het maximum als het minimum zijn relatief
(dit volgt ook uit het feit dat $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$).



Eerste voorbeeld

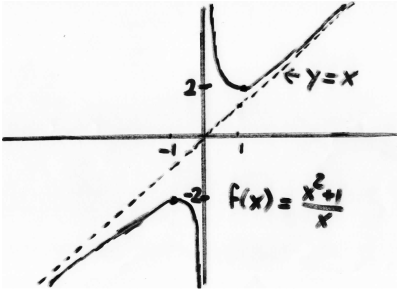
Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ en schets de grafiek.

Domein: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Verticale asymptoot: $x = 0$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$

Scheve asymptoot: $y = x$ voor $x \to \infty$, $x \to -\infty$, de grafiek van f heeft geen snijpunt met de scheve asymptoot

Dalend, stijgend, extremen: f stijgt voor $x < -1$, heeft relatief maximum voor $x = -1$ met $f(-1) = -2$, daalt voor $-1 < x < 0$, daalt voor $0 < x < 1$, heeft relatief minimum voor $x = 1$ met $f(1) = 2$, en stijgt voor $x > 1$



Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Het domein. Het domein is de verzameling van alle x waar de noemer $\neq 0$, dus $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Tweede voorbeeld

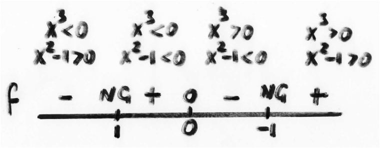
Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Het domein. Het domein is de verzameling van alle x waar de noemer $\neq 0$, dus $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Verticale asymptoten. Voor $x = -1$, $x = 1$ is de noemer 0 en de teller $\neq 0$. Dus $x = -1$, $x = 1$ zijn de verticale asymptoten van f.

Uit het tekenoverzicht van f hieronder volgt

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \infty,\ \lim_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\downarrow -1} f(x) = \infty,\ \lim_{x\uparrow -1} f(x) = -\infty.$$



Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Horizontale of scheve asymptoten. Omdat de graad van de teller $= 1+$ de graad van de noemer heeft f een scheve asymptoot voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$. We bepalen die met een staartdeling.

$$\begin{array}{lll} x^2 - 1/ & x^3 & \backslash x \\ & x^3 - x \;\; - & \\ \hline & x & \end{array}$$

Dus $x^3 = x(x^2 - 1) + x$, $f(x) = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + \dfrac{x}{x^2 - 1} = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^{-1}}{1 - x^{-2}} = 0,$$

$y = x$ is een scheve asymptoot van f voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Snijpunt van grafiek met scheve asymptoot. Als de grafiek van f de lijn $y = x$ ergens snijdt, dan geldt voor de x-coördinaat van een snijpunt dat $f(x) = x$.

We hebben gezien dat $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Dus

$$f(x) = x \iff \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \iff x = 0.$$

Dus de grafiek van f snijdt de lijn $y = x$ in het punt $(0, 0)$.

Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ en schets de grafiek.

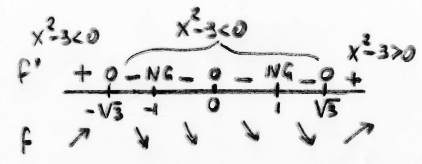
Extremen van f met plaats, grootte en aard. Er geldt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Uit het onderstaande tekenoverzicht van f' blijkt dat f in $x = -\sqrt{3}$ een maximum aanneemt, en in $x = \sqrt{3}$ een minimum.

Er geldt $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{3-1} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Het maximum is kleiner dan het minimum, dus zowel het maximum als het minimum zijn relatief.



Tweede voorbeeld

Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ en schets de grafiek.

Domein: $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$

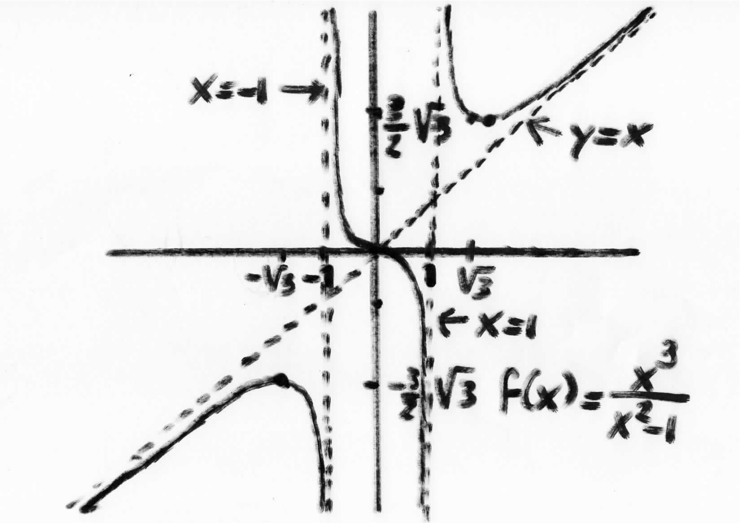
Verticale asymptoot: $x = 1$, $x = -1$
$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow -1} f(x) = -\infty$

Scheve asymptoot: $y = x$ voor $x \to \infty$, $x \to -\infty$, de grafiek van f heeft alleen het snijpunt $(0, 0)$ met de scheve asymptoot

Dalend, stijgend, extremen: f stijgt voor $x < -\sqrt{3}$, heeft relatief maximum voor $x = -\sqrt{3}$ met $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, daalt voor $-\sqrt{3} < x < -1$, daalt voor $-1 < x < 1$, daalt voor $1 < x < \sqrt{3}$, heeft een relatief minimum voor $x = \sqrt{3}$ met $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, en stijgt voor $x > \sqrt{3}$.

Verder heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn in $(0, 0)$ omdat de afgeleide daar 0 is.

De grafiek



x=-1
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$
y=x
$-\sqrt{3}$ -1
1 $\sqrt{3}$
x=1
$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$
$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Einde van het college