UITWERKING CONTINUE WISKUNDE 1 28/10/2016

① a) $\lim_{x\downarrow 8} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 8} {}^2\log x^{(c^2-c)/3} = {}^2\log 8^{(c^2-c)/3} = {}^2\log 2^{c^2-c} = c^2-c$

$\lim_{x\uparrow 8} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 8} \sqrt[4]{x^2+17}+c = \sqrt[4]{81}+c = 3+c$

$\lim_{x\to 8} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow c^2-c=3+c \Leftrightarrow c^2-2c-3=0 \Leftrightarrow$
$(c+1)(c-3)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=-1 \text{ of } c=3}$

b) $f_c(x)$ is continue in $x=8 \Leftrightarrow \lim_{x\to 8} f_c(x)$ bestaat en is gelijk aan $f_c(8)=6$

In ieder geval is $c=-1$ of $c=3$

Als $c=-1$ dan $\lim_{x\to 8} f_c(x)=2\neq 6$, dus is $f_c(x)$ niet continu in $x=8$

Als $c=3$ dan $\lim_{x\to 8} f_c(x)=6$, dus dan is $f_c(x)$ wel continu in $x=8$

Conclusie: $f_c(x)$ is continu in $x=8 \Leftrightarrow \boxed{c=3}$

② a) $x^4+x^2+1>0$ voor alle x. Dus $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ waarbij $g(x)=x^5+3x^3+2x-7$. De functie g is continu, $g(1)=-1$ en $g(2)=53>0$. Dus wegens de tussenwaardestelling heeft $g(x)$, en dus $f(x)$, een nulpunt in $(1,2)$.
De afgeleide $g'(x)=5x^4+9x^2+2>0$ voor elke x, dus g is stijgend. Bijgevolg heeft g, en dus f, geen andere nulpunten.

b) $x^4+x^2+1 / x^5+3x^3+2x-7 \backslash x$ $\qquad x^5+3x^3+2x-7 = x(x^4+x^2+1)+2x^3+x-7$

$\underline{x^5+x^3+x\ -}$

$2x^3+x-7$ $\qquad$ Dus $f(x)=x+\frac{2x^3+x-7}{x^4+x^2+1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+x-7}{x^4+x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 0$$

Dus $\boxed{y=x}$ is een scheve asymptoot van f zowel voor $x\to\infty$ als $x\to-\infty$

③ Er geldt: $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, dus $y=\sqrt{1-x^2}$. Verder is $x\geq 0$, dus $0<x<1$. We moeten dus het maximum bepalen van de functie $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ op $(0,1)$.
Er geldt: $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tekenoverzicht

$$\begin{array}{lccccc} f' & & + & & - & \\ f & 0 & \nearrow & \sqrt{\frac{1}{2}} & \downarrow & 1 \end{array}$$

$f(x)$ is maximaal als $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dan is $y=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Dus xy is maximaal als $\boxed{x=y=\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

④ a) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x-1}{1-\sin\frac{1}{2}\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{-1/x^2}{\frac{1}{4}\pi^2\sin\frac{1}{2}\pi x}$$

$$=\frac{-1}{\frac{1}{4}\pi^2\sin\frac{1}{2}\pi}=\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{1}{x}=\boxed{1}$$

⑤ a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(32)$	$f^{(n)}(32)/n!$
0	$x^{3/5}$	$32^{3/5}=(2^5)^{3/5}=2^3=8$	8
1	$\frac{3}{5}x^{-2/5}$	$\frac{3}{5}\times32^{-2/5}=\frac{3}{5}\times2^{-2}$	$\frac{3}{5}\times2^{-2}=\frac{3}{20}$
2	$-\frac{6}{25}x^{-7/5}$	$-\frac{6}{25}\times32^{-7/5}=-\frac{6}{25}\times2^{-7}$	$-\frac{3}{25}\times2^{-7}=-\frac{3}{25\times128}$
3	$\frac{42}{125}x^{-12/5}$		

a) Dit geeft
$$\boxed{\begin{array}{l} P_{2,32}(x) = 8 + \frac{3}{20}(x-32) - \frac{3}{25 \times 28}(x-32)^2 \\ R_{3,32}(x) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{42}{125}\theta^{-12/5}(x-32)^3 = \frac{7}{125}\theta^{-12/5}(x-32)^3 \\ \theta \text{ tussen } 32 \text{ en } x \end{array}}$$

b) $|R_{3,32}(33)| = \left|\frac{7}{125}\theta^{-12/5}\right| < \frac{1}{125} 32^{-12/5} = \frac{1}{125} \cdot 2^{-12}$

omdat $\theta > 32$.

⑥ $f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}$

a) $x^3+4=0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$ Dus domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-4}\}$

De enige verticale asymptoot van f is $\boxed{x = \sqrt[3]{-4}}$

Tekens f: $\underset{-\sqrt[3]{-4}}{\overset{-\quad|\quad+}{\rule{5em}{0.4pt}}}$

Dus $\lim_{x \downarrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2/x^3}{1+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^3}} = 0$

Dus $\boxed{x=0}$ is de horizontale asymptoot van f zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x^3+4) \cdot 2x - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+4)^2} = \frac{2x^4+8x-3x^4}{(x^3+4)^2} = \frac{8x-x^4}{(x^3+4)^2}$

$= \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2}$

④

Tekenoverzicht f'	$-$	NG	$-$		$+$		$-$
	$x<0$ $8-x^3>0$	$\sqrt[3]{-4}$	$x<0$ $8-x^3>0$	0	$x>0$ $8-x^3>0$	2	$x>0$ $8-x^3<0$
f	↘		↘		↗		↘

extremen	plaats	grootte	aard
	0	0	minimum (relatief)
	2	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	maximum (relatief)

Het maximum en minimum zijn beide relatief, omdat

$\lim_{x \downarrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = -\infty$