

①

UITWERKING CONTINUE WISKUNDE 1 28/10/2016

$$\textcircled{1} \text{ a) } \lim_{x \downarrow 8} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 8} {}^2 \log x^{(c^2-c)/3} = {}^2 \log 8^{(c^2-c)/3} = {}^2 \log 2^{c^2-c} = c^2 - c$$

$$\lim_{x \uparrow 8} f_c(x) = \lim_{x \uparrow 8} \sqrt[4]{x^2+17} + c = \sqrt[4]{81} + c = 3 + c$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_c(x) \text{ bestaat} \Leftrightarrow c^2 - c = 3 + c \Leftrightarrow c^2 - 2c - 3 = 0 \Leftrightarrow (c+1)(c-3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = -1 \text{ of } c = 3}$$

b) $f_c(x)$ is continue in $x=8 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 8} f_c(x)$ bestaat en is gelijk

$$\text{aan } f_c(8) = 6$$

In ieder geval is $c = -1$ of $c = 3$

Als $c = -1$ dan $\lim_{x \rightarrow 8} f_c(x) = 2 \neq 6$, dus is $f_c(x)$ niet continue in $x=8$

Als $c = 3$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} f_c(x) = 6$, dus dan is $f_c(x)$ wel continue in $x=8$

Conclusie: $f_c(x)$ is continue in $x=8 \Leftrightarrow \boxed{c=3}$

② a) $x^4 + x^2 + 1 > 0$ voor alle x . Dus $f_c(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ waarbij $g(x) = x^5 + 3x^3 + 2x - 7$. De functie g is continu, $g(1) = -1$ en $g(2) = 53 > 0$ dus volgens de tussenwaardestelling heeft $g(x)$ en dus $f(x)$ een nulpunt in $(1, 2)$.
De afgeleide $g'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 2 > 0$ voor elke x , dus g is stijgend. Bijgevolg heeft g , en dus f , geen andere nulpunten.

$$\text{b) } \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^5 + 3x^3 + 2x - 7} \Big| x^5 + 3x^3 + 2x - 7 = x(x^4 + x^2 + 1) + 2x^3 + x - 7$$

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^5 + 3x^3 + 2x - 7} \text{ dus } f(x) = x + \frac{2x^3 + x - 7}{x^4 + x^2 + 1}$$

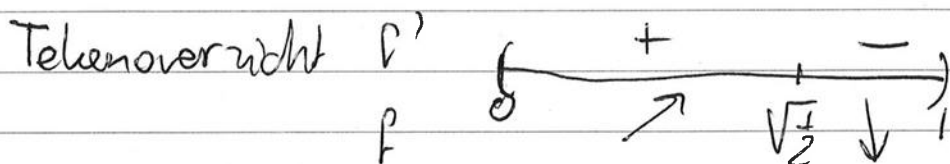
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + x - 7}{x^4 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{7}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 0$$

2

Das $y=x$ is een schieve asymptoot van f zowel voor $x \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow -\infty$

③ Er geldt: $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, dus $y = \sqrt{1-x^2}$. Verder is $x \geq 0$, dus $0 < x < 1$. We moeten dus het maximum bepalen van de functie $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ op $(0,1)$

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } f'(x) &= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$



$f(x)$ is maximaal als $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dan is $y = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 Dus xy is maximaal als $\boxed{x=y = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

④ a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{1 - \sin \frac{1}{2}\pi x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{2}\pi \cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/x^2}{\frac{1}{4}\pi^2 \sin \frac{1}{2}\pi x}$

$$= \frac{-1}{\frac{1}{4}\pi^2 \sin \frac{1}{2}\pi} = \boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{1}$

⑤ a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(32)$	$f^{(n)}(32)/n!$
0	$x^{3/5}$	$32^{3/5} = (2^5)^{3/5} = 2^3 = 8$	8
1	$\frac{3}{5}x^{-2/5}$	$\frac{3}{5} \times 32^{-2/5} = \frac{3}{5} \times 2^{-2}$	$\frac{3}{5} \times 2^{-2} = \frac{3}{20}$
2	$-\frac{6}{25}x^{-7/5}$	$-\frac{6}{25} \times 32^{-7/5} = -\frac{6}{25} \times 2^{-7}$	$-\frac{6}{25} \times 2^{-7} = -\frac{3}{25 \times 2^8}$
3	$\frac{42}{125}x^{-12/5}$		

(3)

b) Dit geeft

$$P_{2,32}(x) = 8 + \frac{3}{20}(x-32) - \frac{3}{25 \cdot 125}(x-32)^2$$

$$R_{3,32}(x) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{42}{125} \theta^{-12/5} (x-32)^3 = \frac{7}{125} \theta^{-12/5} (x-32)^3$$

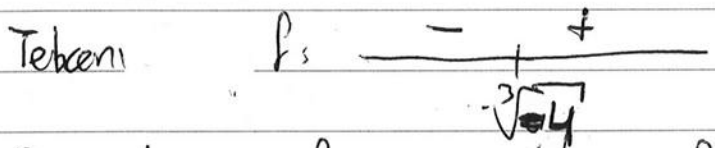
θ tussen 32 en x

$$b) |R_{3,32}(33)| = \left| \frac{7}{125} \theta^{-12/5} \right| < \frac{1}{125} 32^{-12/5} = \frac{1}{125} \cdot 2^{-12}$$

omdat $\theta > 32$.

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}$

a) $x^3+4=0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$ het domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-4}\}$
 De enige verticale asymptoot van f is $x = \sqrt[3]{-4}$



Dus $\lim_{x \downarrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow \sqrt[3]{-4}} f(x) = -\infty$

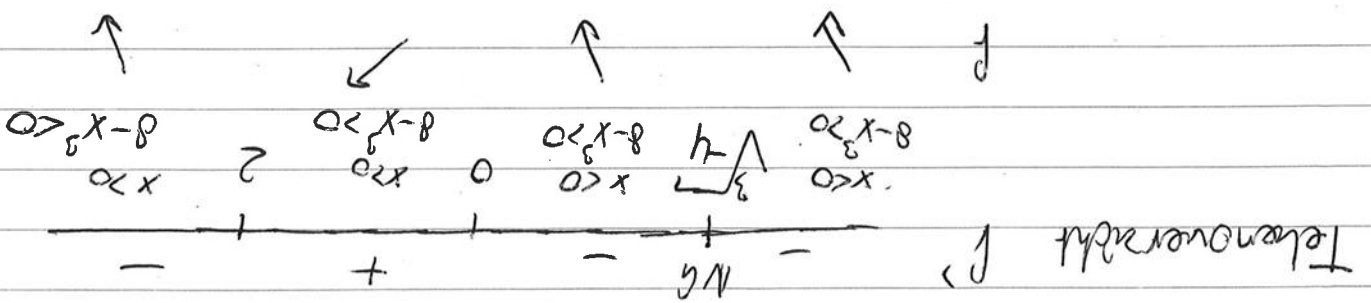
b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(x^2)}{1 + \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{1 + \frac{4}{x^3}} = \infty$

Dus $x = \infty$ is de horizontale asymptoot van f zowel voor $x \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow -\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x^3+4) \cdot 2x - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+4)^2} = \frac{2x^4 + 8x - 3x^4}{(x^3+4)^2} = \frac{8x - x^4}{(x^3+4)^2}$

$$= \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2}$$

(4)



extremen
 platt
 0
 2
 große
 $\frac{4}{3} = 1$
 $\frac{12}{4} = 3$
 ord
 minimum (relativ)
 maximum (relativ)

Hat maximum ein minimum sein beide relativ, ordet

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

