TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1

vrijdag 28 oktober 2016, 14:00-16:00

• Vul op elk tentamenpapier **DUIDELIJK LEESBAAR** je naam en collegekaartnummer in.
• Op de achterzijde staan drie opgaven en een lijstje met formules.
• Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan. Een eenvoudige wetenschappelijke calculator mag wel.
• Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
• Links in de marge staat het maximale aantal punten voor een opgave. Het cijfer is (aantal behaalde punten)/5.

---

1. De functie f_c is gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x^2+17} + c & \text{voor } x < 8, \\ 6 & \text{voor } x = 8, \\ {}^2\log(x^{(c^2-c)/3}) & \text{voor } x > 8. \end{cases}$$

3 *a)* Bepaal de waarde(n) van c waarvoor $\lim_{x \to 8} f_c(x)$ bestaat.

2 *b)* Bepaal de waarde(n) van c waarvoor f_c continu is in $x = 8$.

2. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3 + 2x - 7}{x^4 + x^2 + 1}$.

5 *a)* Laat zien dat f een nulpunt heeft in $(1, 2)$. Leg uit dat f geen andere nulpunten heeft.

5 *b)* Bepaal de scheve asymptoten van f voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$.

5 **3.** Van een rechthoek met zijden x en y is de diameter $\sqrt{x^2 + y^2}$ gelijk aan 1. Bepaal x en y zodat de oppervlakte xy van de rechthoek maximaal is.

ZIE ACHTERKANT

5 **4.** *a)* Bereken $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{1 - \sin(\frac{1}{2}\pi x)}$.

5 *b)* Bereken $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$.

5. Wanneer een functie f $n+1$ keer differentieerbaar is in de buurt van $x = a$, dan geldt $f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$ in de buurt van $x = a$, waarbij $p_{n,a}(x)$ het n^{e} Taylorpolynoom rond $x = a$ is, en $R_{n+1,a}(x)$ de Lagrange-restterm. Hier is

$$R_{n+1,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{met } \theta \text{ tussen } a \text{ en } x.$$

6 *a)* Gegeven is $f(x) = x^{3/5}$. Bepaal $p_{2,32}(x)$ en $R_{3,32}(x)$.

4 *b)* We benaderen $33^{3/5}$ door $p_{2,32}(33)$. We maken een fout $R_{3,32}(33)$. Laat zien dat $|R_{3,32}(33)| < \frac{7}{125} \times 2^{-12}$. Je mag niet gebruikmaken van je rekenapparaat.

6. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+4}$.

3 *a)* Bepaal het domein van f. Bepaal de verticale asymptoten van $f(x)$. Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\displaystyle\lim_{x\uparrow a} f(x)$ en $\displaystyle\lim_{x\downarrow a} f(x)$.

2 *b)* Bepaal de horizontale asymptoten van $f(x)$ voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$.

3 *c)* Bepaal voor welke waarden van x de functie $f(x)$ stijgend of dalend is. Bepaal ook de extremen van $f(x)$ met plaats (x-coördinaat), aard (maximum of minimum, absoluut of relatief) en grootte (y-coördinaat).

2 *d)* Schets de grafiek van $f(x)$.

Formules goniometrie

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$;
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$;
$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Standaardlimieten voor functies

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^q} = 0$ als $q > 0$.