UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 27/10/2017

① a) Probeer de positieve en negatieve delers van -2, dat zijn $\pm 1, \pm 2$. $f(1) = -4$, $f(-1) = 0$. Dus $x=-1$ is een nulpunt van f. Dus $f(x)$ is deelbaar door $x-(-1)=x+1$

$x+1 \,/\, x^3-3x-2 \,\backslash\, x^2-x-2$

x^3+x^2

$-x^2-3x-2$

$-x^2-x$

$-2x-2$

$-2x-2$

0

$x^3-3x-2 = (x^2-x-2)(x+1)$

x^2-x-2 heeft nulpunten $-1, 2$

namelijk $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

of $\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$.

Dus de nulpunten van $f(x)$ zijn -1 en 2.

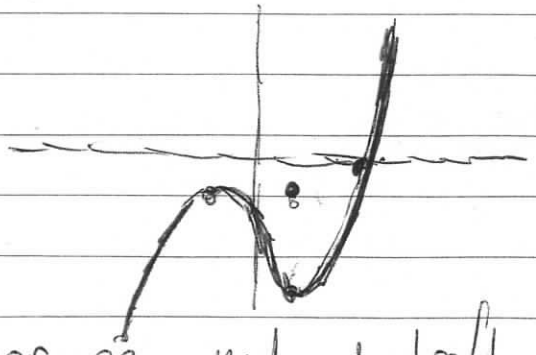
b) $f(2) = 8-6-3 = -1 < 0$, $f(3) = 27-9-3 > 0$. Volgens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in $(2,3)$

c) $f'(x) = 3x^2-3$ Tekenverloop

f'	+	0	−	0	+
		-1		1	
f	↗		↘		↗

$f(-1) = -1$, $f(1) = -5$

extremen	plaats	aard	grootte
	-1	rel. max	-1
	1	rel. min	-5



Uit de grafiek blijkt dat f maar één nulpunt heeft.

② a) $\lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 1} 4^{cx} = 4^c$, $\lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 1} 2^{(c+1)x} = 2^{c+1}$

Dus $\lim_{x\to 1} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow 4^c = 2^{c+1} \Leftrightarrow 2^{2c} = 2^{c+1} \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

2b) f_c links-continu in $x=1 \iff \lim\limits_{x\uparrow 1} f_c(x) = f_c(1) \iff 4^c = 2$

$\iff \boxed{c=\frac{1}{2}}$

f_c rechts-continu in $x=1 \iff \lim\limits_{x\downarrow 1} f_c(x) = f_c(1) \iff 2^{c+1} = 2$

$\iff \boxed{c=0}$

Er is geen enkele waarde van c waarvoor f_c zowel links-continu als rechts-continu is in $x=1$.
Dus f_c is voor $\boxed{\text{geen enkele waarde van } c}$ continu in $x=1$.

③ a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \frac{2}{3}\sqrt{1+x} - \frac{1}{3}}{x^2} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{2x}$$

$$\overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-5/3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}+\frac{1}{6}}{2} = \frac{-\frac{4}{18}+\frac{3}{18}}{2} = \boxed{-\frac{1}{36}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+x^2}{3^x+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{(2/3)^x}^{\to 0} + \overbrace{x^2/3^x}^{\to 0}}{1 + \underbrace{x^3/3^x}_{\to 0}} = \frac{0+0}{1+0} = \boxed{0}$$

④ De omtrek is $2x+2y=2$, dus $x+y=1$, $y=1-x$. Als we dit in de uitdrukking voor de oppervlakte substitueren krijgen we

$$f(x) = x\sqrt{y^2-x^2} = x\sqrt{(1-x)^2-x^2} = x\sqrt{1-2x+x^2-x^2} = x\sqrt{1-2x}$$

Uiteraard eisen we $x \geq 0$ en er moet gelden $2x \leq 1$, dus $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Er geldt:

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + (1-2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-2x}} + \sqrt{1-2x}$$

$$= \frac{-x+1-2x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}}$$

f' | + 0 − |

$0 \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}$

f ↗ ↘

$f(x)$ is maximaal voor $\boxed{x=\frac{1}{3}}$. Dan is $\boxed{y=1-x=\frac{2}{3}}$

⑤

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\tan x$	0	0
1	$\cos^{-2} x$	1	1
2	$2\sin x \cdot \cos^{-3} x$	0	0
3	$2\sin x \cdot 3\sin x \cdot \cos^{-4} x$ $+ 2\cos x \cdot \cos^{-3} x$ $= 6\sin^2 x \cdot \cos^{-4} x$ $+ 2\cos^{-2} x$	2	$\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$

$$P_{3,0}(x) = f^{(0)}(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = \boxed{x + \frac{1}{3}x^3}$$

⑥ $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-x^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)}$

a) Domein $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ verticale asymptoten $x=0$, $x=1$

Tekenverloop f + NG + 0 − NG +

$0 \qquad \frac{1}{2} \qquad 1$

$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2.x^{-2}-x^{-3}}{1-x^{-1}} = 0.$ y=0 horizontale asymptoot voor $x\to\pm\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x^3-x^2).2-(2x-1)(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^2-\{6x^3-4x^2-3x^2+2x\}}{(x^3-x^2)^2}$

$= \frac{-4x^3+5x^2-2x}{(x^3-x^2)^2} = \frac{-x(4x^2-5x+2)}{(x^3-x^2)^2}$

$4x^2-5x+2$ heeft discriminant $5^2-4\times2\times4=-7<0$
dus geen nulpunten

Tekenverloop f'	+	NG	−	NG	−
f	↗	0	↓	1	↓