UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1, 26/10/2018

1 a) $\lim_{x\uparrow 0} f_c(x) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{-1/2}$,

$\lim_{x\downarrow 0} f_c(x) = 2^{c}$

$\lim_{x\to 0} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow \boxed{c=-\frac{1}{2}}$ en in dat geval $\lim_{x\to 0} f_c(x) = 2^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Voor $c=-\frac{1}{2}$ geldt: $f_c(0) = 2^{-1/2} = \lim_{x\to 0} f_c(x)$, dus f_c is continu in $x=0$.

b) $\lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = 2^{c+1}$, $f_c(1)=8$

f_c links-continu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 2^{c+1}=8 \Leftrightarrow \boxed{c=2}$

$\lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 1} 2^{c^2-x} = 2^{c^2-1}$

f_c rechtscontinu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 2^{c^2-1}=8 \Leftrightarrow c^2-1=3 \Leftrightarrow c^2=4$
$\Leftrightarrow \boxed{c=2 \text{ of } -2}$

f_c continu in $x=1 \Leftrightarrow f_c$ links-continu en rechtscontinu in $x=1$
$\Leftrightarrow \boxed{c=2}$

2 Volgens gegeven is $2\pi rh + 2\pi r^2 = 1$, dus $2\pi rh = 1-2\pi r^2$, dus
$h = (1-2\pi r^2)/2\pi r$.
De inhoud van de cylinder is dus $\pi r^2 . (1-2\pi r^2)/2\pi r = \frac{1}{2} r(1-2\pi r^2)$
$= \frac{1}{2}r - \pi r^3 =: f(r)$
We moeten het absolute maximum bepalen van $f(r)$ voor $r>0$
Er geldt: $f'(r) = \frac{1}{2} - 3\pi r^2$

Tekenoverzicht f':

	0		$\sqrt{\frac{1}{6\pi}}$	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

Dus f neemt een absoluut maximum aan in $\boxed{r = \sqrt{\frac{1}{6\pi}}}$.

De bijbehorende waarde van h is $\dfrac{1-2\pi\left(\sqrt{1/6\pi}\right)^2}{2\pi\sqrt{1/6\pi}} = \dfrac{1-2\pi\cdot\frac{1}{6\pi}}{\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\pi}}$

$= \dfrac{2/3}{\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\pi}} = \dfrac{2/3}{\frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\sqrt{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt{6\pi}}$.

We vinden $\boxed{r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}},\quad h = \frac{2}{\sqrt{6\pi}}}$

3 a) Als $f(x) = x^4 + x^3 + 2x + 2$ een geheel nulpunt heeft dan is dit een positieve of negatieve deler van 2, dus 1, -1, 2 of -2
Het blijkt dat -1 een nulpunt is van f dus $f(x)$ is deelbaar door $x-(-1) = x+1$

$x+1 \,/\, x^4+x^3+2x+2 \,\backslash\, x^3+2$
x^4+x^3 −
$2x+2$
$2x+2$
0

$x^4+x^3+2x+2 = (x+1)(x^3+2)$

Hieruit volgt dat $f(x)$ nulpunten $\boxed{x=-1,\ x=-\sqrt[3]{2}}$ heeft.

b) We gebruiken de tussenwaardestelling: als een functie g continu is op $[a,b]$ en $g(a)<0$, $g(b)>0$ of andersom, dan is er een $c\in(a,b)$ met $g(c)=0$.
Er geldt: $g(-2) = 16-8-4+1 = 5>0$, $g(-1) = 1-1-2+1 = -1<0$, dus g heeft een nulpunt in $(-2,-1)$
Er geldt: $g(0) = 1>0$. Dus g heeft een nulpunt in $(-1,0)$
Er geldt: $x^4, x^3, x \geq 0$ voor $x\geq 0$ dus $g(x)>0$ voor $x\geq 0$, dus g heeft $\boxed{\text{geen}}$ nulpunten op $[0,\infty)$.

c) $x^3+2 \,/\, x^4+x^3+2x+1 \,\backslash\, x+1$
x^4+2x −
x^3+1
x^3+2
-1

$x^4+x^3+2x+1 = (x+1)(x^3+2)-1$

$h(x) = x+1 - \dfrac{1}{x^4+x^3+2x+1}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)-(x+1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^4+x^3+2x+1}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1/x^4}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = 0.$

Dus $\boxed{y=x+1}$ is een scheve asymptoot van $h(x)$ zowel voor $x\to\infty$ als $x\to-\infty$.

4 a) $\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)-2x+x^2}{x^3+x^5} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+x}-2+2x}{3x^2+5x^4} \overset{0/0}{=}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}+2}{6x+20x^3} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{(1+x)^3}}{6+60x^2} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

b) $\lim_{x\to\infty} x^{1/\sqrt[23]{x}} = \lim_{x\to\infty} (e^{\ln x})^{1/\sqrt[23]{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{(\ln x)/x^{1/23}} = e^0 = 1$

want $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/23}} = 0$

5

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\frac{e^x}{x+1}$	1	1
1	$\frac{(x+1)e^x-1.e^x}{(x+1)^2} = \frac{x.e^x}{(x+1)^2}$	0	0
2	$\frac{(x+1)^2\{x.e^x+e^x\}-x.e^x.2(x+1)}{(x+1)^4}$	1	$\frac{1}{2}$

$P_{2,0}(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1+0.x+\frac{1}{2}x^2 = \boxed{1+\frac{1}{2}x^2}$

6 $f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$

a) Het domein van f is $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ (voor $x=-1,2$ is de teller $\neq 0$ en de noemer 0); de verticale asymptoten van f zijn $x=-1$, $x=2$

Tekenoverzicht f

$x<-1$, $x<2$	-1		0	$x>-1$, $x<2$	2	$x>-1$, $x>2$
$+$	NC	$-$	0	$-$		$+$

④

$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$ (✱)

b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \boxed{1}$

$\boxed{y=1}$ is de horizontale asymptoot van $f(x)$ zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x^2-x-2)\cdot 2x - x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x - 2x^3 + x^2}{(x^2-x-2)^2}$

$= \frac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

Tekenoverzicht f': (denk aan het - teken in de teller)

	-4		-1		0		2	
$-$	0	$+$	NG	$+$	0	$-$	NG	$-$
$x<0$, $x+4<0$		$x<0$, $x+4>0$				$x>0$, $x+4>0$		
f ↓		↗		↗		↓		↓

extremen:

x (plaats)	f(x) (grootte)	aard
-4	$\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$	minimum, relatief
0	0	maximum, relatief

Het minimum en maximum zijn relatief omdat het minimum groter is dan het maximum, of wegens (✱)