

1

UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1, 26/10/2018

① a) $\lim_{x \uparrow 0} f_c(x) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{-1/2}$

$\lim_{x \downarrow 0} f_c(x) = 2^c$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$ en in dat geval $\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x) = 2^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Voor $c = -\frac{1}{2}$ geldt $f_c(0) = 2^{-1/2} = \lim_{x \rightarrow 0} f_c(x)$, dus f_c is continu in $x=0$.

b) $\lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = 2^{c+1}$, $f_c(1) = 8$

f_c links-continu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \uparrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 2^{c+1} = 8 \Leftrightarrow \boxed{c=2}$

$\lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x \downarrow 1} 2^{c^2-x} = 2^{c^2-1}$

f_c rechtscontinu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \downarrow 1} f_c(x) = f_c(1) \Leftrightarrow 2^{c^2-1} = 8 \Leftrightarrow c^2-1=3 \Leftrightarrow c^2=4 \Leftrightarrow \boxed{c=2 \text{ of } -2}$

f_c continu in $x=1 \Leftrightarrow f_c$ links-continu en rechtscontinu in $x=1 \Leftrightarrow \boxed{c=2}$

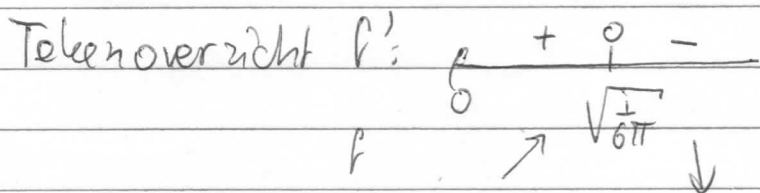
② Volgens gegeven is $2\pi r h + 2\pi r^2 = 1$, dus $2\pi r h = 1 - 2\pi r^2$, dus

$h = (1 - 2\pi r^2) / 2\pi r$.

De inhoud van de cylinder is dus $\pi r^2 \cdot (1 - 2\pi r^2) / 2\pi r = \frac{1}{2} r (1 - 2\pi r^2) = \frac{1}{2} r - \pi r^3 =: f(r)$

We moeten het absolute maximum bepalen van $f(r)$ voor $r > 0$

Er geldt $f'(r) = \frac{1}{2} - 3\pi r^2$



Dus f neemt een absoluut maximum aan in $\boxed{r = \sqrt{\frac{1}{6\pi}}}$.

②

De bijbehorende waarde van h is $\frac{1 - 2\pi(\sqrt{1/6\pi})^2}{2\pi\sqrt{1/6\pi}} = \frac{1 - 2\pi \cdot \frac{1}{6\pi}}{\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\pi}}$

$$= \frac{2/3}{\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{2/3}{\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{6\pi}}$$

We vinden $r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}, h = \frac{2}{\sqrt{6\pi}}$

③ a) Als $f(x) = x^4 + x^3 + 2x + 2$ een geheel nulpunt heeft dan is dit een positieve of negatieve deler van 2, dus 1, -1, 2 of -2. Het blijkt dat -1 een nulpunt is van f dus $f(x)$ is deelbaar door $x - (-1) = x + 1$.

$$x+1 \overline{) x^4 + x^3 + 2x + 2} \quad x^4 + x^3 + 2x + 2 = (x+1)(x^3 + 2)$$

hieruit volgt dat $f(x)$ nulpunten $x = -1, x = \sqrt[3]{2}$ heeft.

b) We gebruiken de tussenwaardestelling; als een functie g continu is op $[a, b]$ en $g(a) < 0, g(b) > 0$ of andersom, dan is er een $c \in (a, b)$ met $g(c) = 0$.

Er geldt: $g(-2) = 16 - 8 - 4 + 1 = 5 > 0, g(-1) = 1 - 1 - 2 + 1 = -1 < 0$, dus g heeft een nulpunt in $(-2, -1)$.

Er geldt: $g(0) = 1 > 0$. Dus g heeft een nulpunt in $(-1, 0)$.

Er geldt: $x^4, x^3, x > 0$ voor $x > 0$ dus $g(x) > 0$ voor $x > 0$, dus g heeft geen nulpunten op $(0, \infty)$.

c) $x^3 + 2 \overline{) x^4 + x^3 + 2x + 1} \quad x^4 + x^3 + 2x + 1 = (x+1)(x^3 + 2) - 1$

$$h(x) = x+1 - \frac{1}{x^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 2} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^4}{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = 0$$

(3)

Dus $y=x+1$ is een schone asymptoot van $h(x)$ zowel voor $x \rightarrow 0$ als $x \rightarrow -\infty$.

$$\textcircled{4} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - 2x + x^2}{x^3 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x} - 2 + 2x}{3x^2 + 5x^4} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2}{(1+x)^2} + 2}{6x + 20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{6 + 60x^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\sqrt[23]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\ln x})^{1/\sqrt[23]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln x)/x^{1/23}} = e^0 = 1$$

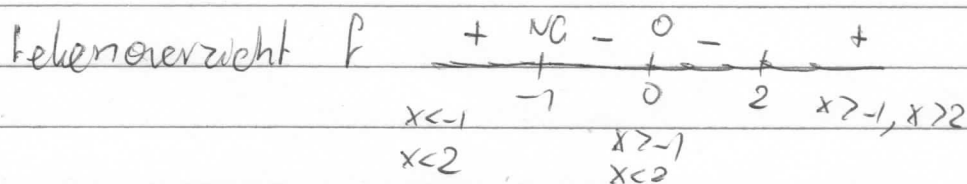
want $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/23}} = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\frac{e^x}{x+1}$	1	1
1	$\frac{(x+1)e^x - 1 \cdot e^x}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$	0	0
2	$\frac{(x+1)^2 \{x \cdot e^x + e^x\} - x \cdot e^x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$	1	$\frac{1}{2}$

$$p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 = \boxed{1 + \frac{1}{2}x^2}$$

$$\textcircled{6} \text{ f}(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

a) Het domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ (voor $x=-1, 2$ is de teller $\neq 0$ en de noemer 0); de verticale asymptoten van f zijn $x=-1, x=2$



4

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow -1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \uparrow -1} f(x) = \infty \quad (*)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$y=1$ is de horizontale asymptoot van $f(x)$ zowel voor $x \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow -\infty$

$$c) f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2) \cdot 2x - x^2(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x - 2x^3 + x^2}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

Tekenoverzicht f' (denk aan het teken in de teller)

	-	0	+	NA	+	0	-	NA	-
		-4		-1		0		2	
$x < -4$			$x < 0$		$x > 0, x > 2$				
			$x > -4$		$x > 0, x < 2$				

extremen	x (plaats)	$f(x)$ (grootte)	aard
	-4	$\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$	minimum, relatief
	0	0	maximum, relatief

Het minimum en maximum zijn relatief omdat het minimum groter is dan het maximum of wegens (*)

