①

UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1,
25-10-2019.

① a) Zij $g(x) = x^3 - 3x - 2$. Als $g(x)$ een geheel nulpunt $x=a$ heeft dan is a een positieve of negatieve deler van de constante term, in dit geval -2. Dus eventuele kandidaten voor een geheel nulpunt zijn $\pm 1, \pm 2$. Als $x=a$ een nulpunt is van $g(x)$ dan is $g(x)$ deelbaar door $x-a$.
Er geldt: $g(1) = -4$, $g(-1) = 0$. Dus -1 is een nulpunt, en $g(x)$ is deelbaar door $x+1$.

$$
\begin{array}{l}
x+1 \,/\, x^3 - 3x - 2 \,\backslash\, x^2 - x - 2 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\quad -x^2 - 3x - 2 \\
\quad \underline{-x^2 - x} \\
\qquad -2x - 2 \\
\qquad \underline{-2x - 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)(x+1)(x-2)$$

Dus de nulpunten van $g(x)$ zijn $\boxed{x=-1 \text{ en } x=2}$

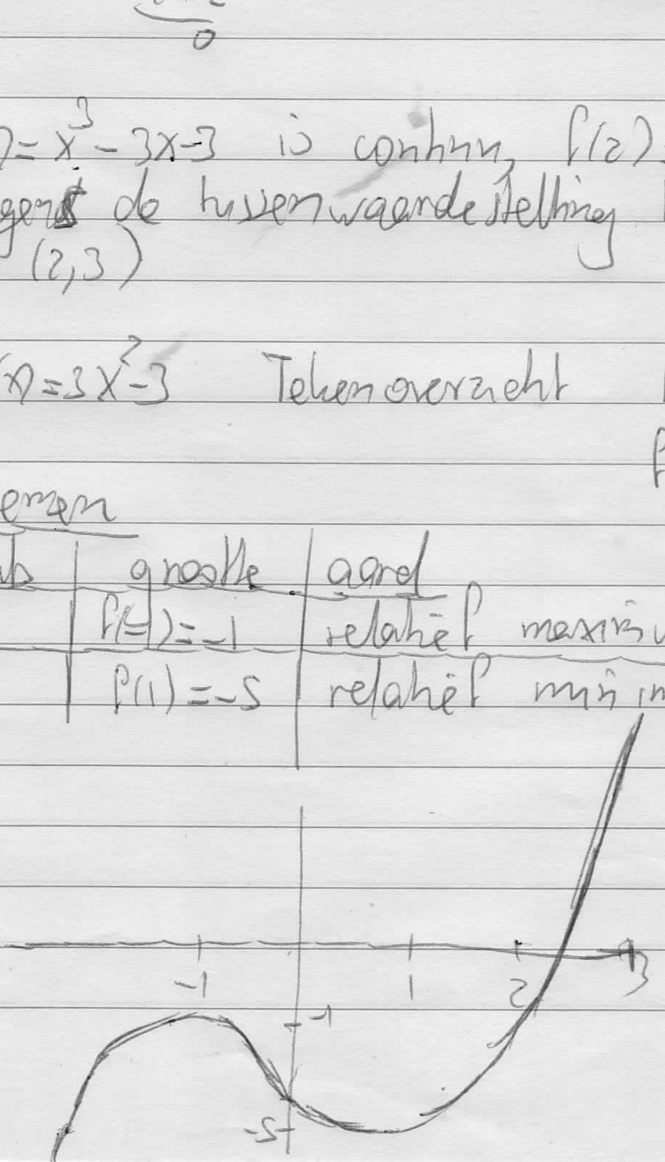
b) $f(x) = x^3 - 3x - 3$ is continu, $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 15 > 0$.
Volgens de tussenwaardestelling heeft $f(x)$ een nulpunt in $(2,3)$

c) $f'(x) = 3x^2 - 3$ Tekenoverzicht

f'	+	0	−	0	+
f	↗	-1	↘	1	↗

extremen

plaats	grootte	aard
-1	$f(-1) = -1$	relatief maximum
1	$f(1) = -5$	relatief minimum



Het minimum en maximum zijn relatief want $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Uit de grafiek blijkt dat f maar één nulpunt heeft, het nulpunt uit b).

2 a) $\lim_{x\uparrow 2} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 2} \frac{{}^2\log(x^c)}{x-1} = \frac{{}^2\log 2^c}{1} = c$

f_c linkscontinu in $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x\uparrow 2} f_c(x) = f_c(2) \Leftrightarrow c = c^2$

$\Leftrightarrow c^2 - c = 0 \Leftrightarrow c(c-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c=0 \text{ of } c=1}$

b) $\lim_{x\downarrow 2} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 2} x - c^2 = 2 - c^2.$

f_c rechtscontinu in $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 2} f_c(x) = f_c(2) \Leftrightarrow 2 - c^2 = c^2$

$\Leftrightarrow 2c^2 = 2 \Leftrightarrow c^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{c=1 \text{ of } c=-1}$

f_c continu in $x=2 \Leftrightarrow f_c$ linkscontinu en rechtscontinu in $x=2 \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

b) $\lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 1} \frac{{}^2\log x^c}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1} \frac{c \cdot {}^2\log x}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1} \frac{c \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}}{x-1}$

$\overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\downarrow 1} \frac{c}{\ln 2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \boxed{\frac{c}{\ln 2}}$

3 Volgens gegeven is $y = \frac{1}{x}$, en $x > 0$. We moeten het absolute minimum bepalen van $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ op $(0, \infty)$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} = \frac{3x^5 - 2}{x^3}$ $\qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2/3}$

Tekenoverzicht f': $0 \quad - \quad \sqrt[5]{2/3} \quad +$

$\searrow \qquad \nearrow$

Dus f neemt op $(0, \infty)$ een absoluut minimum aan voor $\boxed{x = \sqrt[5]{2/3}}$. De bijbehorende waarde van y is $\frac{1}{\sqrt[5]{2/3}} = \sqrt[5]{3/2}$. Dus $\boxed{y = \sqrt[5]{3/2}}$

3

(4) $$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+1}{(\ln x)^2} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$$

(5) a) $$P_{2,4}(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f^{(2)}(4)}{2!}(x-4)^2$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$	$f^{(n)}(4)/n!$
0	$x^{3/2}$	$4^{3/2} = 8$	8
1	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{2} \times 4^{1/2} = 3$	3
2	$\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4} \times 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

$$\boxed{P_{2,4}(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2}$$

b) $$R_{3,4}(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-4)^3 = \frac{\frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\xi^{-3/2}}{3!}(x-4)^3 = \boxed{-\frac{1}{16}\xi^{-3/2}(x-4)^3}$$

met ξ tussen 4 en x.

c) $$\left|\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2} - P_{2,4}\left(\frac{9}{2}\right)\right| = \left|R_{3,4}\left(\frac{9}{2}\right)\right| = \frac{1}{16}\xi^{-3/2}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

met $4 \le \xi \le \frac{9}{2}$.

$$\le \frac{1}{16} 4^{-3/2} 2^{-3} = 2^{-4} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}$$

$$\left(\xi^{-3/2} \le 4^{-3/2} = 2^{-3}\right)$$

(6) $$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$$

a) Domein van f : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Verticale asymptoot: $x=0$.

Tekenoverzicht van f

$$\begin{array}{ccccccc} - & 0 & + & NG & + \\ & \sqrt[3]{-1/2} & & 0 & \end{array}$$

④

a) (vervolg) Uit het tekenoverzicht van f blijkt dat
$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$

b) f heeft schere asymptoten voor $x \to \pm\infty$ want
graad teller = 1+ (graad noemer)

$x^2 / 2x^3 + 1 \backslash 2x$
$\underline{2x^3}$
1

$2x^3 + 1 = 2x \cdot x^2 + 1$, dus
$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Dus $y = 2x$ is een schere asymptoot van f voor $x \to \infty$
en $x \to -\infty$
Opmerking: $f(x) > 2x$ dus de grafiek van f ligt boven de
schere asymptoot

c) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot 6x^2 - 2x(2x^3+1)}{x^4} = \frac{2x^4 - 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}$

Tekenoverzicht f'

f'	+	NG	−	0	+	
	$x^3 < 1$, $x^3 < 0$	0	$x^3 > 1$, $x^3 < 0$	1	$x^3 > 1$, $x^3 > 0$	
f	↗		↘		↗	

extremen plaats grootte aard
$x = 1$ $f(1) = 3$ relatief minimum
(relatief want $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + \frac{1}{x^2} = -\infty$)

5