(1)

UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1
23-10-2020

(1) a) Laat $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$. Een eventueel geheeltallig nulpunt van $f(x)$ moet een positieve (of negatieve) deler zijn van 2, dus $1, -1, 2$ of -2.

Er geldt $f(1) = 1-3-9+2 = -9$, $f(-1) = -1-3+9+2 = 7$, $f(2) = 8-12-18+2 = -20$, $f(-2) = -8-12+18+2 = 0$

Dus $x = -2$ is een nulpunt van $f(x)$. We bepalen de andere nulpunten met een staartdeling:

$$
\begin{array}{l}
x+2 \;/\; x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \;\backslash\; x^2 - 5x + 1 \\
\quad\quad\;\; \underline{x^3 + 2x^2} \\
\quad\quad\quad\quad -5x^2 - 9x + 2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-5x^2 - 10x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x + 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{x + 2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0
\end{array}
$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = (x+2)(x^2 - 5x + 1)$$

Dus de nulpunten van $f(x)$ zijn $x = -2$ en de nulpunten van $x^2 - 5x + 1$

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

De nulpunten van $f(x)$ zijn $\boxed{x = -2, \frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}}$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ nulpunten $\frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 3 \times 9}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6}$
$= -1$ of 3

f': $+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$[\; -2 \quad\quad -1 \quad\quad 3 \quad\quad 5 \;]$

f: $-2 \nearrow -1 \searrow 3 \nearrow 5$

x	$f(x)$	aard
-2	0	rel. minimum
-1	7	abs. maximum
3	-25	abs. minimum
5	7	abs. maximum

2 Er geldt: $h = \frac{1}{\frac{1}{3}\pi r^2}$. Dus de oppervlakte van de kegel is

$$f(r) = \pi r^2 + \pi r \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{3}{r}$$

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{3}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 3}{r^2} = \frac{2\pi(r^3 - 3/2\pi)}{r^2}$$

Tekenoverzicht f': 0 — $-$ — $\sqrt[3]{3/2\pi}$ — $+$

f: $\searrow$ $\nearrow$

f neemt in $\boxed{r=\sqrt[3]{3/2\pi}}$ zijn absolute minimum op $(0,\infty)$ aan. De bijbehorende waarde van h is

$$h = \frac{3}{\pi r^2} = \frac{3/\pi}{(3/2\pi)^{2/3}} = \frac{3}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{2/3} = \frac{2^{2/3}}{\pi^{1/3}}\cdot 3^{1/3} = \boxed{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}}$$

Dus de oppervlakte is minimaal voor $\boxed{r=\sqrt[3]{3/2\pi},\ h=\sqrt[3]{12/\pi}}$

3 a) $\lim_{x\uparrow\pi} f_c(x) = \lim_{x\uparrow\pi} 2\sin x + c = 2\sin\pi + c = c$

Dus f_c linkscontinu in $x=\pi \Leftrightarrow \lim_{x\uparrow\pi} f_c(x) = f_c(\pi) \Leftrightarrow c^3 = c$

$\Leftrightarrow c^3 - c = 0 \Leftrightarrow c(c^2-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=0,1 \text{ of } -1}$

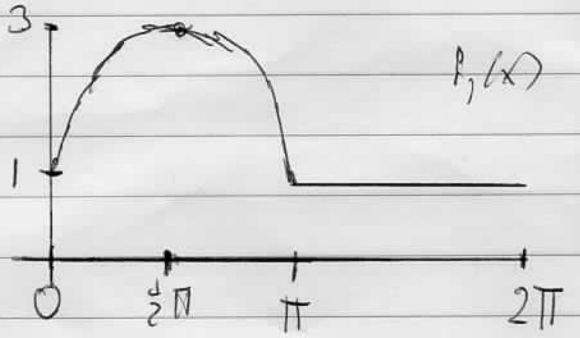
f_c rechts-continu in $x=\pi \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow\pi} f_c(x) = f_c(\pi)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\downarrow\pi}(c^2)^{x/\pi} = f_c(\pi) \Leftrightarrow c^2 = c^3 \Leftrightarrow c^3 - c^2 = 0 \Leftrightarrow c^2(c-1)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{c = 0 \text{ of } 1}$

f_c continu in $x=\pi \Leftrightarrow f_c$ linkscontinu en rechtscontinu in $x=\pi \Leftrightarrow \boxed{c=0 \text{ of } c=1}$

b)



$f_1(x) = 2\sin x + 1 \qquad 0 \le x \le \pi$

$ = 1 \qquad \pi < x \le 2\pi$

(4) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{\sin^2 x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \frac{1}{1+x}}{2\sin x \cdot \cos x} \overset{0/0}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2\sin x\cdot(-\sin x) + 2\cos x\cdot\cos x} = \dfrac{1+1}{2} = \boxed{1}$

b) Schrijf $x^{1/\sqrt[3]{x}} = e^{(\ln x)/\sqrt[3]{x}}$

Merk op: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^{1/3}} = 0$ (blz. 3)

Dus $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\sqrt[3]{x}} = e^0 = \boxed{1}$

(5) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4}$

a) domein $= \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (x^4 moet $\neq 0$ zijn)

Tekenoverzicht

		-1		0		1	
f	$+$	0	$-$	NG	$-$	0	$+$
	$x^2-1>0$, $x^4>0$		$x^2-1<0$, $x^4>0$		$x^2-1<0$, $x^4>0$		$x^2-1>0$, $x^4>0$

verticale asymptoot: $x=0$ $\quad \lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$

b) Graad teller < graad noemer, dus f heeft een <u>horizontale asymptoot</u> $y=0$ voor $x\to\infty$, $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{-2}-x^{-4} = 0-0=0$$

c) $$f'(x) = \frac{x^4\cdot 2x-(x^2-1)4x^3}{x^8} = \frac{2x^5-4x^5+4x^3}{x^8} = \frac{-2x^5+4x^3}{x^8} = \frac{-2x^2+4}{x^5}$$

$$= \frac{-2(x^2-2)}{x^5} \qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}$$

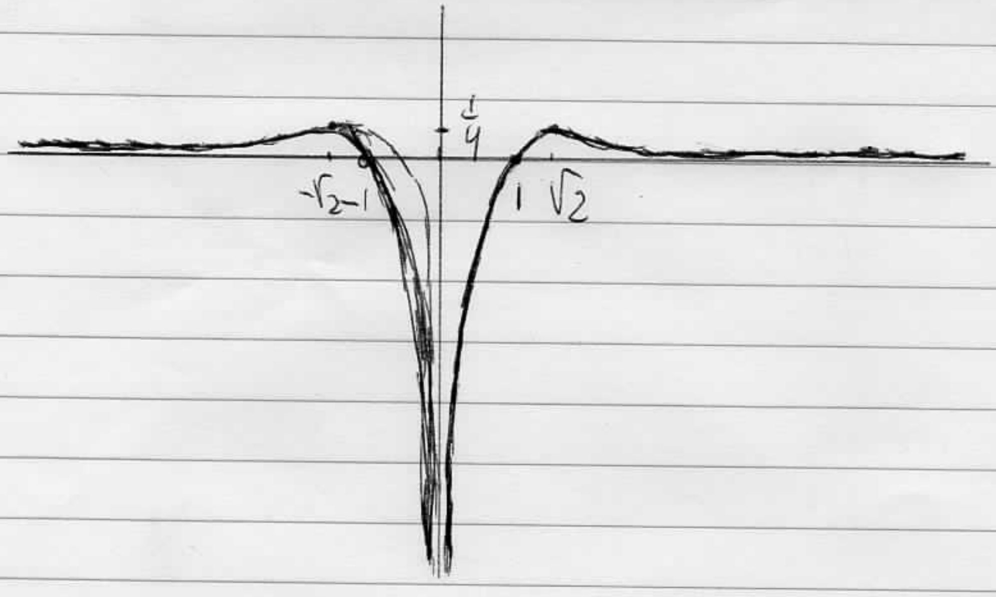
Tekenoverzicht f' $+\ 0\ -\ NG\ +\ 0\ -$ ($-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$)

f $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$

$x^2-2>0$, $x^5<0$ $x^2-2<0$, $x^5<0$ $x^2-2<0$, $x^5>0$ $x^2-2>0$, $x^5>0$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2-1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}, \quad f(-\sqrt{2}) = \frac{2-1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}$$

f neemt in $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ <u>absolute maxima</u> aan van grootte $\frac{1}{4}$



6 a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	e^{x^2-1}	1	1
1	$e^{x^2-1}\cdot 2x$	2	2
2	$e^{x^2-1}\cdot 2x\cdot 2x+e^{x^2-1}\cdot 2$ $= e^{x^2-1}(4x^2+2)$	6	3
3	$e^{x^2-1}\cdot 8x+e^{x^2-1}\cdot 2x(4x^2+2)$ $= e^{x^2-1}(8x+8x^2+4x)$ $= e^{x^2-1}(8x^2+12x)$		

b) 2e Taylorpolynoom rond $x=1$

$$P_{2,1}(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 = 1+2(x-1)+3(x-1)^2$$

c) Lagrange-restterm

$$R_{3,1}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-1)^3 = \frac{e^{s^2-1}(8s^2+12s)}{6}\cdot(x-1)^3$$

met s tussen 1 en x.