UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1, 29/10/2021

1 a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ is continu, $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, dus wegens de tussenwaardestelling heeft f een nulpunt in $(-1, 0)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$. De discriminant is $6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -12 < 0$
Dus f' heeft geen nulpunten.
Omdat de coefficient van x^2 groter dan 0 is, is $f'(x) > 0$ voor alle x. Dus $f(x)$ is stijgend voor alle x
$f(x)$ kan dus buiten het nulpunt in a) geen andere nulpunten hebben

c) De eventuele geheeltallige nulpunten van $g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ zijn positieve of negatieve delers van 6, dus $\pm1, \pm2, \pm3$
Er geldt $g(1) = 7$, $g(-1) = 0$. Dus $x = -1$ is een nulpunt
Deel $g(x)$ door $x - (-1) = x + 1$.

$$
\begin{array}{l}
x+1 / x^3 - 4x^2 + x + 6 \backslash x^2 - 5x + 6 \\
\quad \underline{x^3 + x^2} - \\
\quad\quad -5x^2 + x + 6 \\
\quad\quad \underline{-5x^2 - 5x} - \\
\quad\quad\quad 6x + 6 \\
\quad\quad\quad \underline{6x + 6} - \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$g(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6) = (x+1)(x-2)(x-3)$

Dus $\boxed{x = -1,\ x = 2,\ x = 3}$ zijn de nulpunten van $g(x)$.

2) Uit de conditie $x^3y^2=1$ volgt: $y^2=x^{-3}$, $y=x^{-3/2}$.
We moeten dit invullen in x^4+y^4 en krijgen dan $x^4+(x^{-3})^2=x^4+x^{-6}$. We moeten dus het absolute minimum bepalen van $f(x)=x^4+x^{-6}$ op $(0,\infty)$

Er geldt: $f'(x)=4x^3-6x^{-7}=\dfrac{4x^{10}-6}{x^7}=\dfrac{4}{x^7}\left(x^{10}-\dfrac{3}{2}\right)$

Tekenoverzicht f'

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & \sqrt[10]{\frac{3}{2}} & \\ f' & (& - & | & + \\ f & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Dus $f(x)$ neemt in $\boxed{x=\sqrt[10]{\frac{3}{2}}}$ zijn absolute minimum op $(0,\infty)$ aan. De bijbehorende y waarde is

$$y=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{10}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{10\cdot 2}}=\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{20}}}$$

3) a) $\lim_{x\downarrow 1} f_c(x)=\lim_{x\downarrow 1}(2-c^2)(x-2)^2=2-c^2$

$\lim_{x\uparrow 1} f_c(x)=\lim_{x\uparrow 1} c\cdot x^2=c$

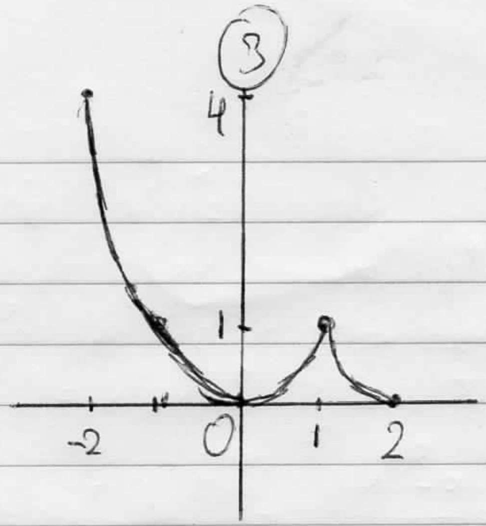
Dus $\lim_{x\to 1} f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow 2-c^2=c \Leftrightarrow c^2+c-2=0$
$\Leftrightarrow (c-1)(c+2)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=1 \text{ of } c=-2}$

b) $f_c(x)$ continu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f_c(x)=f_c(1)$

voor $c=1$ geldt: $\lim_{x\to 1} f_c(x)=1$, $f_c(1)=1$, dus $f_c(x)$ continu in $x=1$.

voor $c=-2$ geldt: $\lim_{x\to 1} f_c(x)=-2$, $f_c(1)=1$, dus $f_c(x)$ niet continu in $x=1$.

③ c)



$x = -2$, absolunt maximum, grootte 4
$x = 0, 2$ absolunt minimum, grootte 0
$x = 1$, relatief maximum, grootte 1

④ a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x + 3\cos 3x}{2(x - \frac{\pi}{2})} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin x - 9\sin 3x}{2} = \dfrac{-1 - 9(-1)}{2} = \dfrac{-1+9}{2} = \boxed{4}$

b) $(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin x}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^1 = \boxed{e}$

⑤ a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 8}$ Domein $x^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, dus $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Tekenoverzicht f: $\begin{array}{ccccc} - & 0 & - & NG & + \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$

b) graad teller $= 1 +$ graad noemer, dus $f(x)$ heeft een schuine asymptoot voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$

(5) b) (wendig) $x^3-8 \,/\, x^4 \,\backslash\, x$

$\underline{x^4 - 8x}\; -$

$8x$

$x^4 = x(x^3-8) + 8x$

$f(x) = x + \dfrac{8x}{x^3-8}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{x^3-8} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x^{-2}}{1-8x^{-3}} = 0$$

c) $$f'(x) = \frac{(x^3-8)\cdot 4x^3 - x^4\cdot 3x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}$$

$$= \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

d) Tekenoverzicht f' — 0 — VG — 0 +

$0 \qquad 2 \qquad \sqrt[3]{32}$

$f \quad \nearrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \nearrow$

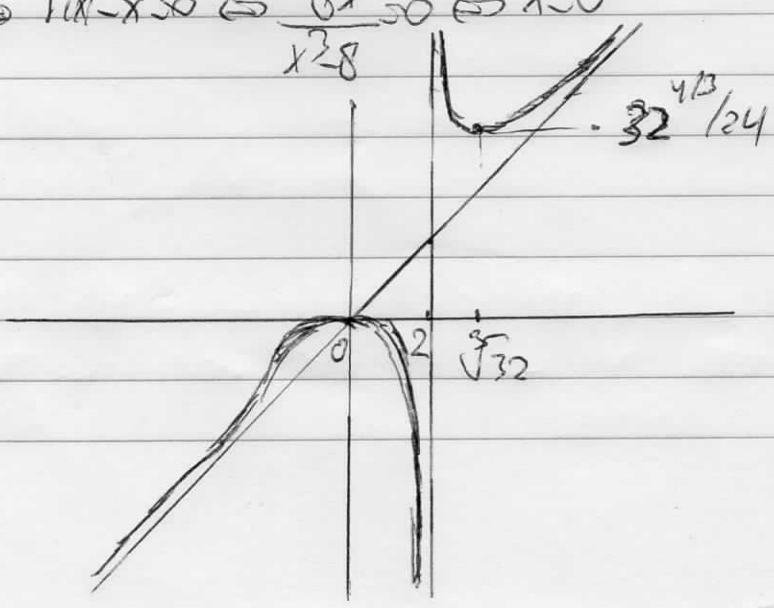
$x=0$ $f(0)=0$ relatief maximum want $\lim_{x\downarrow 2} f(x) = \infty$

$x=\sqrt[3]{32}$ $f(\sqrt[3]{32}) = \dfrac{32^{4/3}}{(\sqrt[3]{32})^3-8} = \dfrac{32^{4/3}}{32-8} = \dfrac{32^{4/3}}{24} \approx 4{,}233$

relatief minimum want $\lim_{x\uparrow 2} f(x) = -\infty$

e) Snijpunt van de grafiek van f met de scheve asymptoot $y=x$

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow \dfrac{8x}{x^3-8}=0 \Leftrightarrow x=0$



6 a) $f(x) = (1+2x)^{1/4}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(1+2x)^{-3/4} \cdot 2 = \frac{1}{2}(1+2x)^{-3/4}$

$f^{(2)}(x) = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}(1+2x)^{-7/4} \cdot 2 = -\frac{3}{4}(1+2x)^{-7/4}$

$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)(1+2x)^{-11/4} \cdot 2 = \frac{21}{8}(1+2x)^{-11/4}$

b) $P_{2,40}(x) = f(40) + f'(40)(x-40) + \frac{f^{(2)}(40)}{2!}(x-40)^2$

$f(40) = 81^{1/4} = 3$, w.l. $3^4 = 81$

$f'(40) = \frac{1}{2} \times 81^{-3/4} = \frac{1}{2} \times (81^{1/4})^{-3} = \frac{1}{2} \times 3^{-3} = \frac{1}{2 \times 27} = \frac{1}{54}$

$f^{(2)}(40) = -\frac{3}{4} \times 81^{-7/4} = -\frac{3}{4} \times 3^{-7} = \frac{-1}{4 \times 3^6}$

$\frac{f^{(2)}(40)}{2!} = -\frac{1}{8 \times 3^6} = -\frac{1}{5832}$

$P_{2,40}(x) = 3 + \frac{1}{54}(x-40) - \frac{1}{5832}(x-40)^2$

c) $R_{3,40}(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-40)^3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{21}{8}(1+2s)^{-11/4}(x-40)^3$

$= \frac{21}{6 \times 8}(1+2s)^{-11/4}(x-40)^3 = \frac{7}{16}(1+2s)^{-11/4}(x-40)^3$

s tussen 40 en x