# TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 11-1-2013
## 2E DEELTENTAMEN

1a) $\int_0^1 \sin(e^{2x}+x^2)(e^{2x}+x)\,dx =$

$u = e^{2x}+x^2$

$du = (2e^{2x}+2x)dx$

$(e^{2x}+x)dx = \frac{1}{2}du$

$u$ loopt van $e^{2\cdot 0}+0^2 = 1$ naar $e^{2\cdot 1}+1^2 = e^2+1$

$$= \int_1^{e^2+1} (\sin u)\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \left[-\tfrac{1}{2}\cos u\right]_1^{e^2+1} = \boxed{\tfrac{1}{2}\left(\cos 1 - \cos(e^2+1)\right)}$$

b) $\int (x^2+1)\cos x\,dx = (x^2+1)\cdot\sin x - \int 2x\cdot\sin x\,dx =$

$f = x^2+1$

$g' = \cos x$

$g = \sin x$

$f = 2x$

$g' = \sin x$

$g = -\cos x$

$$= (x^2+1)\sin x - \left\{-2x\cdot\cos x - \int 2\cdot(-\cos x)\,dx\right\}$$

$$= \boxed{(x^2+1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C}$$

2) $f(x,y) = x^2y + 4xy + 3e^y$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\infty} x^3+4x^2+3e^x = \infty$, ($e^x$ groeit het snelst)

$\lim_{x\to-\infty} f(x,x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^3}_{-\infty}+4x^2+3\underbrace{e^x}_{0} = -\infty$ ($x^2$, $e^x$ verwaarloosbaar t.o.v. $x^3$ als $x\to-\infty$)

Dus $f$ kan geen absolute maxima of minima aannemen.

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy+4y = 2y(x+2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2+4x+3e^y$

Stationaire punten: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Uit $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ volgt:

$y=0$ of $x=-2$.

$y=0$ invullen in $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ geeft: $x^2+4x+3=0$
Dus $x=-1$ of $x=-3$
Dit geeft de stationaire punten $(-1,0)$ en $(-3,0)$.

$x=-2$ invullen in $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ geeft: $-4+3e^y=0$, dus $e^y=\frac{4}{3}$,
dus $y=\ln(4/3)$. Dit geeft het stationaire punt $(-2, \ln 4/3)$.

c) $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2x+4$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3e^y$
$H=AC-B^2$

Criterium: $A>0, H>0 \Rightarrow$ minimum; $A<0, H>0 \Rightarrow$ maximum;
$H<0 \Rightarrow$ zadelpunt; $H=0 \Rightarrow$ geen uitsluitsel.

| | A | B | C | H | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-1,0)$ | $0$ | $2$ | $3$ | $-4<0$ | zadelpunt |
| $(-3,0)$ | $0$ | $-2$ | $3$ | $-4<0$ | zadelpunt |
| $(-2, \ln 4/3)$ | $2\ln\frac{4}{3}>0$ | $0$ | $3e^{\ln 4/3}=4$ | $8\ln\frac{4}{3}>0$ | minimum. |

Het minimum is relatief omdat f geen absolute minima aan kan nemen wegens a)

d) De vergelijking van het raakvlak is

$$z=f(1,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y = 3+8y$$

3) a) $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$.

Dus $(1+i)^5=(\sqrt{2})^5.(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)=(\sqrt{2})^5(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i)$
$=(\sqrt{2})^4(-1-i)=-4-4i$

$$\frac{(1+i)^5}{2-i}=\frac{-4-4i}{2-i}=\frac{(-4-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-8-4i-8i-4i^2}{5}$$

$$= \frac{-4-12i}{5} = \boxed{-\frac{4}{5} - \frac{12}{5}i}$$

b) $D = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 5 = 64 - 80 = -16 < 0$

Oplossingen van $az^2 + bz + c = 0$ met $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$. In dit geval:

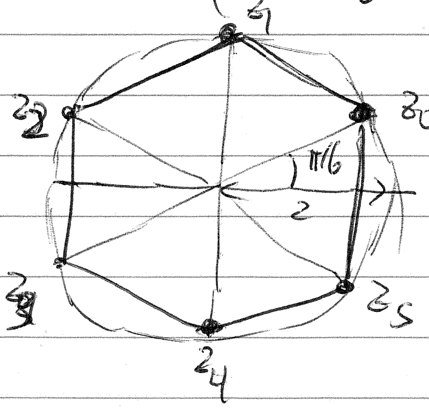
$$z_{1,2} = \frac{8 \pm i\sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4i}{8} = \boxed{1 \pm \tfrac{1}{2}i}$$

c) $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

Oplossingen van $z^6 = -64$:

$$z_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

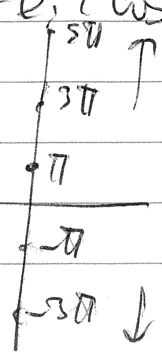
$$= 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$




De oplossingen $z_0, \ldots, z_5$ liggen op een regelmatige zeshoek met straal 2.
Eén van de hoekpunten heeft argument $\pi/6$

d) $e^z = -1$. Schrijf $z = a + bi$. Dan $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$
Verder is $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

Dus $e^z = -1 \Leftrightarrow e^a = 1,\ \cos b = \cos\pi$
$\Leftrightarrow a = 0,\ b = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow z = (\pi + 2k\pi)i\ (k \in \mathbb{Z})$




oneindig veel oplossingen

4) a) Gebruik het vergelijkingskenmerk:

Als $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ voor alle $n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert,

en $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, met $0 \leq l < \infty$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent

Neem hier $a_n = \frac{n^2+1}{n^5+1}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$. Er geldt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergent.

en $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)/(n^5+1)}{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n^2+1)}{n^5+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^3}{n^5+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2}{1+1/n^5} = 1.$

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^5+1}$ $\boxed{\text{convergeert}}$

b) Gebruik het quotiëntkenmerk

Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent

$> 1$ divergent

$=$ geen uitsluitsel.

In ons geval: $a_n = \frac{n^3}{n!}$ Gebruik dat $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ Dan

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3/(n+1)!}{n^3/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 0 < 1.$

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ $\boxed{\text{convergeert}}$

c) Gebruik $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ als $-1 < r < 1$. Dus

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4/5} + \frac{1}{1/5} = \frac{3\times 5}{4} + 5 = \boxed{8\frac{3}{4}}$

HELE STOF

1(a) FOUT IN OPGAVE, BIJ IEDEREEN GOED GEREKEND!
Had moeten zijn

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2\sin x-1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2\cos x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}-2\sin x}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+\ln x}{2x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\ln x}{x^3}\to 0}{2+\frac{1}{x^3}\to 0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) $f_c$ is continu in $x=1 \iff \lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = f_c(1),\ \lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = f_c(1)$

Er geldt: $f_c(1) = c^2,\ \lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 1} (c+\ln x)^2 = c^2,$

$\lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 1} 2c\cos \pi x = -2c$ $\quad (\cos\pi = -1)$

Dus $f_c$ is continu in $x=1 \iff$
$c^2=-2c \iff c^2+2c=0 \iff c(c+2)=0 \iff \boxed{c=0 \text{ of } c=-2}$

3) $P_3(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$

| $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ | $f^{(n)}(0)/n!$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $e^{\sin x}$ | 1 | 1 |
| 1 | $e^{\sin x}\cdot\cos x$ | 1 | 1 |
| 2 | $e^{\sin x}\cdot\cos^2 x - e^{\sin x}\cdot\sin x$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | $e^{\sin x}\cdot\cos^3 x - e^{\sin x}\cdot 2\sin x\cos x - e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\sin x - e^{\sin x}\cdot\cos x$ | 0 | 0 |

$P_3(x) =$

$$\boxed{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

4) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{x-2}$

a) f heeft verticale asymptoten waar de noemer 0 is, dus alleen in $\boxed{x=2}$

$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$ (teller $\geq 0$, noemer $< 0$)

$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \infty$ (teller $\geq 0$, noemer $> 0$)

b)
$$x-2 \,/\, x^2 \,\backslash\, x+2$$
$$\frac{x^2-2x}{2x-4}$$
$$\frac{2x}{-4}$$

$x^2 = (x+2)(x-2)+4$,

$\frac{x^2}{x-2} = x+2+\frac{4}{x-2}$

Dus $f(x) = x+3+\frac{4}{x-2}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x-2} = 0$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x-2} = 0$

Dus $y = x+3$ is een scheve asymptoot van f zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x-2)\cdot 2x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

Tekenoverzicht $f'$

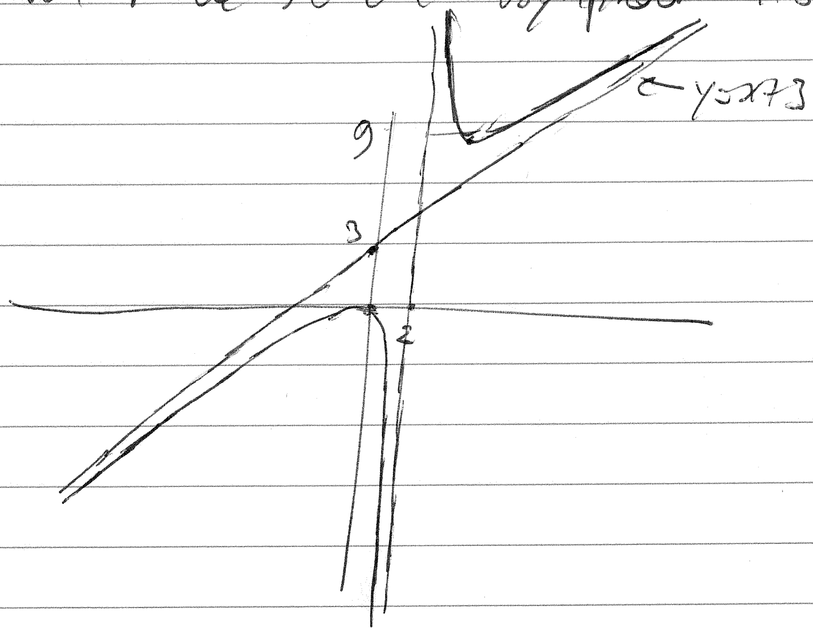
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − | 2 | − | 4 | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

f heeft een maximum in $x=0$, grootte $f(0)=1$

f heeft een minimum in $x=4$, grootte $f(4)=9$

Dus beide extremen zijn <u>relatief</u>

d) Uit $f(x) = x+3 + \frac{4}{x-2}$ volgt dat de grafiek van $f$ de scheve asymptoot $x+3$ niet snijdt.




5) zie 2e deeltentamen 1a en 1b

6) zie 2e deeltentamen 2a, 2b en 2c

7) zie 2e deeltentamen 3a, 3b en 3c

8) zie 2e deeltentamen 4a en 4b.