UITWERKING HERKANSING CONTINUE WISKUNDE
3 APRIL 2013

Herkansing 2^e^ deeltentamen

1. a) $\int x \ln x \, dx = \int \ln x \cdot x \, dx \underset{\uparrow}{=} (\ln x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$f(x) = \ln x$
$g'(x) = x$
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$= \boxed{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}$

b) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x \, dx \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{3}\int e^u \, du = -\frac{1}{3}e^u + C$
$= -\frac{1}{3}e^{\cos 3x} + C$

$u = \cos 3x$
$du = -3 \sin 3x \, dx$

$$\int_0^{\pi} e^{\cos 3x} \sin 3x \, dx = \left[-\frac{1}{3}e^{\cos 3x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}(-e^{-1} + e^{1}) = \boxed{\frac{1}{3}(e - e^{-1})}$$

2. $f(x,y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x$

a) $\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x = -\infty$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x = \infty$

Hieruit volgt dat f willekeurig grote en willekeurig kleine waarden aan kan nemen, m.a.w. f kan geen absolute maxima en absolute minima aannemen

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - x^2 + 5x - 4$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$

Door in te vullen zien we dat (1,0), (4,0), (0,2), (0,-2) in ieder geval stationaire punten zijn. We laten nu zien dat het de enige zijn.

De stationaire punten zijn alle paren (x,y) die tegelijk aan $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ voldoen

Uit $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ volgt x = 0 of y = 0. Als we x = 0 invullen

in $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ krijgen we $y^2-4=0$ dus $y=2$ of $y=-2$
Dit geeft de stationaire punten $(0,2), (0,-2)$
Als we $y=0$ invullen in $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ krijgen we $x^2-5x+4=0$
dus $(x-1)(x-4)=0$. Dit geeft de stationaire punten
$(1,0), (4,0)$.

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A=-2x+5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=B=2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=C=2x$

$H=AC-B^2$

	A	B	C	H	
$(1,0)$	$3>0$	0	2	$6>0$	relatief minimum.
$(4,0)$	$-3<0$	0	8	$-24<0$	zadelpunt
$(0,2)$	$5>0$	4	0	$-16<0$	zadelpunt
$(0,-2)$	$5>0$	-4	0	$-16<0$	zadelpunt.

d) $f(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$
Vergelijking raakvlak:

$$z=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0),$$

$\boxed{z=-4x}$

3 a) $(2+i)^2=2^2+2\times 2i+i^2=4+4i-1=3+4i$,

$$\frac{(2+i)^2}{3-i}=\frac{3+4i}{3-i}=\frac{(3+4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9+3i+12i+4i^2}{10}$$

$$=\frac{5+15i}{10}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}$$

b) De discriminant is $D=2^2-4\times 2\times 13=4-104=-100$
Oplossingen:

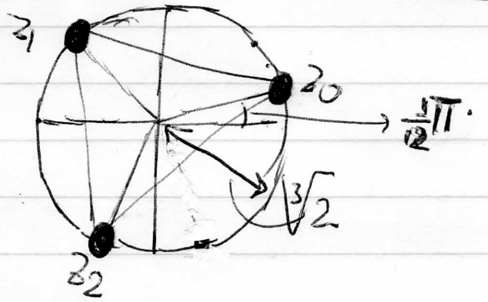
$$z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-2\pm i\sqrt{100}}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}i}$$

c) $|\sqrt{2}(1+i)|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$
$\arg(\sqrt{2}(1+i))=\frac{1}{4}\pi$, $\sqrt{2}(1+i)=2(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi)$

(3)

De oplossingen van $z^3 = \sqrt{2}(1+i)$ zijn

$$\boxed{z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi\right)\right), \quad k=0,1,2}$$



d) Schrijf $z = a+bi$. Dan is $e^{a+bi} = 2$
$|e^{a+bi}| = e^a$ dus $a = \ln 2$,
$e^{bi} = \cos b + i\sin b = 1$, dus $b = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
De oplossingen zijn

$$\boxed{z = \ln 2 + 2k\pi i, \ (k \in \mathbb{Z})}$$

(4) a) Merk op: $\frac{n+1}{n\sqrt{n}} = \frac{n+1}{n^{3/2}}$ is van orde van grootte $n^{-\frac{1}{2}}$. We gebruiken het vergelijkingskenmerk en vergelijken de reeks met $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} \Big/ n^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^{1/2}}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}$ divergeert. Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ $\boxed{\text{divergeert}}$

b) Omdat er in de reeks een exponentiële functie voorkomt (~~quotient~~ 2^n) gebruiken we het quotiëntkenmerk:
als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dan divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dan geen uitsluitsel. In ons geval, $a_n = \frac{n}{2^n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $\boxed{\text{convergeert}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + 2\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} + 2\,\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} + 6 = \boxed{\frac{15}{2}}$

<u>Herkansing tentamen over de hele stof</u>

1 a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + 1 - \cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + \sin x}{2x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \cos x}{2} = \frac{-1+1}{2} = \boxed{0}$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+4})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+4}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+5) - (x+4)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+4}} = \boxed{0}$

2 a) $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \ln(x^5 + e^2) = \ln(e^2) = 2,$

$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} 2\cos(8x^3) = 2\cos 0 = 2$

Dus $\lim_{x\to 0} f(x)$ <u>bestaat</u> en is gelijk aan $\boxed{2.}$

b) $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \neq 3$. Dus $f(x)$ is <u>niet</u> continu in $x=0$

3

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$e^x \cos x$	1	1
1	$e^x \cdot \cos x - e^x \sin x$	1	1
2	$e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x - e^x \sin x - e^x \cdot \cos x = -2e^x \cdot \sin x$	0	0
3	$-2e^x \sin x - 2e^x \cos x$	-2	$\frac{-2}{3!} = -\frac{1}{3}$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3$$

$$= \boxed{1 + x - \frac{1}{3} x^3}$$

4 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3}$

a) De verticale asymptoten zijn $x = a$, waarbij a een nulpunt is van de noemer. In ons geval geeft dit de verticale asymptoten $\boxed{x = \sqrt{3}}$, $\boxed{x = -\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \downarrow \sqrt{3}} f(x) = -\infty$ (teller <0, noemer >0)

$\lim\limits_{x \uparrow \sqrt{3}} f(x) = \infty$ (teller <0, noemer <0)

$\lim\limits_{x \downarrow -\sqrt{3}} f(x) = \infty$ (teller <0, noemer <0)

$\lim\limits_{x \uparrow -\sqrt{3}} f(x) = -\infty$ (teller <0, noemer >0)

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} = 0$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (zelfde berekening)

Dus $y = 0$ is horizontale asymptoot van f zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{(x^2-3)\cdot 1 - 2x(x-2)}{(x^2-3)^2} = \dfrac{x^2-3-2x^2+4x}{(x^2-3)^2}$

$= \dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2} = \dfrac{-(x^2-4x+3)}{(x^2-3)^2} = \dfrac{-(x-1)(x-3)}{(x^2-3)^2}$

Tekenoverzicht f':

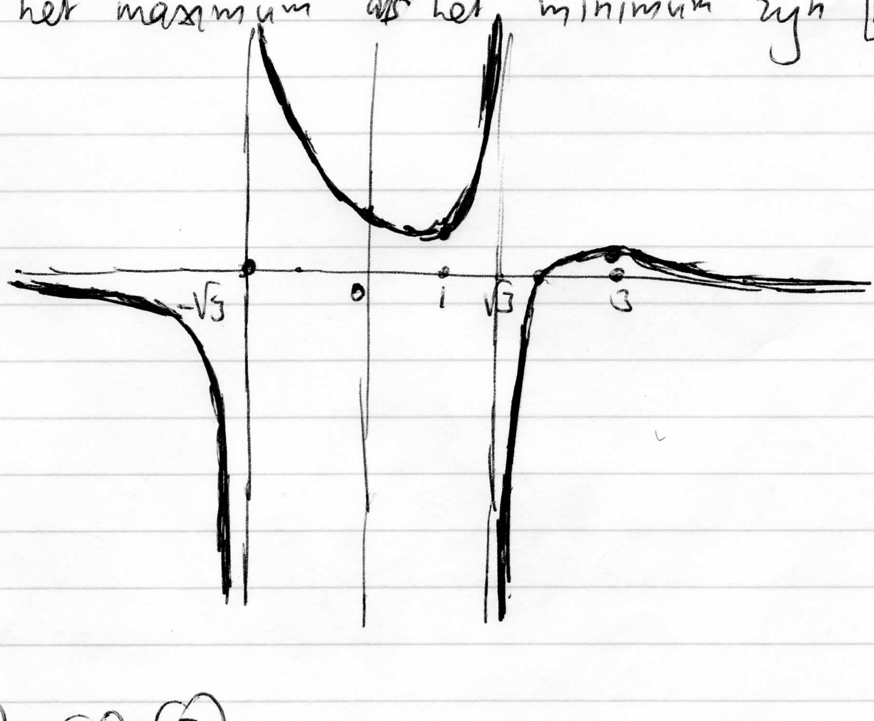
	$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3	
$-$	NG	$-$	0	$+$	NG	$+$	0	$-$
$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

minimum in $\boxed{x=1}$, grootte $f(1) = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

maximum in $\boxed{x=3}$, grootte $f(3) = \boxed{\frac{1}{6}}$.

Het maximum is kleiner dan het minimum, dus zowel het maximum als het minimum zijn $\boxed{\text{relatief}}$

d)



5, 6, 7, 8

Zie uitwerking herkansing 2e deel, opgaven 1, 2abc, 3abc, 4ab.