1

UITWERKING 1E DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE
21-10-2013

1 a) $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+2}-x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^4+2}-x^2)(\sqrt{x^4+2}+x^2)}{\sqrt{x^4+2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^4+2)-x^4}{\sqrt{x^4+2}+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^4+2}}_{\downarrow\,\infty}+\underbrace{x^2}_{\downarrow\,\infty}} = \boxed{0}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2}-\sin x}{x^2} = \boxed{\infty.}$$ vl. de teller gaat naar 1, de noemer naar 0, en $x^2>0$ voor $x\neq 0$

Ik heb hier bij het typen een fout gemaakt. Ik had eigenlijk de limiet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+x^2}-1-\sin x}{x^2}$$ bedoeld.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2}-1-\sin x}{\cancel{x}^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+x^2}(1+2x)-\cos x}{2x}$$

$$\underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2}(1+2x)^2+e^{x+x^2}\cdot 2+\sin x}{2} = \frac{1+2+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Ik heb bij iedereen die op $\frac{e^{x+x^2}-\sin x}{x^2}$ de regel van L'Hôpital heeft toegepast (dit had dus niet gemogen!) en verder geen rekenfout heeft gemaakt het antwoord goed gerekend.

2 a) Zij $f(x) = x^3+2x^2-2x-1$. Als $x=a$, met a een geheel getal, een nulpunt is van $f(x)$ dan is a een deler van -1. Dus $a=\pm 1$.
Er geldt: $f(1)=0$. Dus $x=1$ is een nulpunt van $f(x)$.
We kunnen $f(x)$ delen door $x-1$

$$x-1 \,/\, x^3+2x^2-2x-1 \,\backslash\, x^2+3x+1$$
$$\underline{x^3-x^2}$$
$$3x^2-2x$$
$$\underline{3x^2-3x}$$
$$x-1$$
$$\underline{x-1}$$
$$0$$

$x^3+2x^2-2x-1 = (x^2+3x+1)(x-1)$

Uit de abc-formule volgt dat x^2+3x+1 nulpunten $\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ heeft

Dus $f(x)$ heeft nulpunten $\boxed{x=1,\ x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$

b) Zij $f(x) = x^3+x^2+x-2$ $f(x)$ is een continue functie op $\mathbb{R}$. Er geldt: $f(0) = -2<0$, $f(1)=1>0$
Volgens de tussenwaardestelling heeft $f(x)$ een nulpunt in $[0,1]$
Er geldt $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-2 = -\frac{9}{8}<0$
Volgens de tussenwaardestelling heeft $f(x)$ een nulpunt in $[\frac{1}{2},1]$.

3 f_c is rechtscontinu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = f_c(1)$

Er geldt $f_c(1)=c$, $\lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\downarrow 1} c^2\ln(ex) = c^2\ln(e) = c^2$.

Dus f_c is rechtscontinu in $x=1 \Leftrightarrow c^2=c \Leftrightarrow c(c-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{c=0 \text{ of } c=1}$

f_c is continu in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\downarrow 1} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = f_c(1)$

Er geldt: $\lim_{x\uparrow 1} f_c(x) = \lim_{x\uparrow 1} \cos(\frac{1}{2}\pi x) = \cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$.

Dus f_c is continu in $x=1 \Leftrightarrow c^2=0=c \Leftrightarrow \boxed{c=0}$

(4) a) Het derde Taylorpolynoom van een functie $f(x)$ rond $x=a$ is

$$P_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Er geldt: $f(x) = P_3(x) + E_3(x)$, waarbij de foutterm $E_3(x)$ gelijk is aan

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(u)(x-a)^4}{4!}, \text{ met } u \text{ tussen } a \text{ en } x$$

We passen dit toe met $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $a=1$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$f^{(n)}(1)/n!$
0	$x^{1/4}$	1	1
1	$\frac{1}{4}x^{-3/4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$-\frac{3}{16}x^{-7/4}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{32}$
3	$\frac{21}{64}x^{-11/4}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{7}{128}$
4	$-\frac{231}{256}x^{-15/4}$		

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + \frac{7}{128}(x-1)^3$$

$$E_3(x) = \frac{-\frac{231}{256}u^{-15/4}}{4!}(x-1)^4 \quad u \text{ tussen } 1 \text{ en } x$$

b) $$|E_3(1,00001)| = \frac{231}{256}\cdot\frac{1}{24}\,u^{-15/4}(0,00001)^4 \qquad 1 \leq u \leq 1,00001$$

$$< \frac{1}{24}\times 10^{-20} < 10^{-21}!$$

5 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$

a) $f(x)$ heeft een verticale asymptoot in $x=a$ als de noemer nul is en de teller $\neq 0$ in $x=a$.
Dit geldt alleen voor $\boxed{x=-1}$.

$\lim_{x\downarrow -1} f(x)=\infty$ (teller ≥ 0, noemer ≥ 0), $\lim_{x\uparrow -1} f(x)=-1$ (teller ≥ 0, noemer <0)

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1+\frac{1}{x^3}}=0$,

dus $y=0$ is een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x\to\infty$.
Dezelfde berekening geeft: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
Dus $y=0$ is ook een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x\to-\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{(x^3+1)(x^2)'-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\dfrac{(x^3+1)\cdot 2x-x^2\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$=\dfrac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}=\dfrac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}=\dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$

nulpunten: $x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$

Tekenoverzicht

f	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
f'	$-$	-1	$-$	0	$+$	$\sqrt[3]{2}$	$-$

$f(x)$ heeft een relatief minimum in $x=0$ (want $\lim_{x\uparrow -1} f(x)=-\infty$)
en een relatief maximum in $x=\sqrt[3]{2}$ (want $\lim_{x\downarrow -1} f(x)=\infty$)

Er geldt $f(0)=0$, $f(\sqrt[3]{2})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

5c)